THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Les notions de limite et de dérivée en économie

Rouard, Céline

Award date:
2010

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR

Faculté des Sciences

LES NOTIONS DE LIMITE ET DE DERIVEE EN ECONOMIE

Mémoire présenté pour l'obtention

du grade académique de master en « SCIENCES MATHEMATIQUES A FINALITE DIDACTIQUE »

Céline ROUARD

Août 2010

Promotrice : Valérie Henry

Remerciements

En prologue à ce mémoire, je souhaite exprimer mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier ma promotrice, Valérie Henry, qui s'est toujours montrée à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

J'exprime également ma gratitude à Suzanne Thiry, aux assistants du cours de Mathématiques pour l'économie et la gestion I, aux assistants et professeur du cours d'Introduction aux faits et Mécanismes économiques qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Que tous les étudiants qui ont participé d'une manière ou d'une autre aux interviews ou ont prêté gracieusement des documents trouvent également ici l'expression de ma reconnaissance.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes amis et ma famille dont le soutien et les encouragements m'ont été indispensables.

Résumé

Ce mémoire traite des liens qui unissent les mathématiques et l'économie et pointe la problématique du décalage interdisciplinaire. Nous analysons spécifiquement les notions de dérivées et de limite dans des ouvrages économistes. Nous comparons aussi les cours de mathématiques et cours d'économie dispensés aux bacheliers de première année en sciences économiques et de gestion aux FUNDP. Cette double analyse est réalisée pour mettre en évidence l'utilisation non toujours explicite des notions mathématiques en économie. Nous examinons, enfin, une expérimentation réalisée auprès de quatre étudiants en économie et gestion afin de tester les différents problèmes apparus lors de notre étude. Par ce mémoire, nous montrons le caractère fondamental des mathématiques pour l'économie et nous espérons qu'il permettra à des enseignants de mathématiques d'expliquer le rôle crucial que son cours joue dans d'autres disciplines.

Abstract

This memory concerns the gap between the mathematics and the economy. We analyze the notions of derivative and limit in economist books. We compare the mathematics and economist courses which are studied in the first year in the economic department in the University of Namur. This double investigation is realized to show the bad utilization of some mathematics notions in economy. Finally, we make an experience with four students in economy to test the different problems which were appeared during our study. By this memory, we explain the fundamental character of the mathematics in the economy and we hope that the mathematicsŠ teacher could show the importance of their course in other disciplines.

Sommaire

Introduction

En économie, les mathématiques sont souvent considérées comme un outil permettant d'obtenir certains résultats. En ce fait, des notions mathématiques telles que la limite et la dérivée sont régulièrement adoptées pour traduire des phénomènes économiques.

La problématique que nous allons traiter dans ce mémoire est l'utilisation non toujours explicite de ces notions mathématiques en économie. En effet, beaucoup d'économistes ont l'habitude de considérer des variations unitaires des quantités auxquelles ils ont recours. Mais ils emploient, sur les concepts déterminés à l'aide de ces variations, des notions de dérivées et de limite qui sont définies, mathématiquement, à l'aide de variations infiniment petites. Nous examinerons donc le décalage qui existe entre ce que font les économistes et les mathématiciens. Ce mémoire a pour objectif de montrer l'écart entre les concepts vu théoriquement dans les cours de mathématiques et leurs utilisations dans les cours d'économie. Ce décalage est mis en évidence car il peut être une source d'obstacles à la compréhension des étudiants.

Dans un premier chapitre, nous allons, tout d'abord, l'illustrer par un exemple la différence entre ce que nous appellerons, l'approche discrète et l'approche continue d'un concept économique. Nous analyserons, par la suite, différentes visions d'économistes sur des notions de microéconomie de base telles que l'élasticité, le taux marginal de substitution (technique) et le coût marginal en nous référant à des ouvrages d'économie.

Nous consacrerons ensuite un chapitre à l'analyse des cours de mathématiques et cours d'économie dispensés aux bacheliers de première année en sciences économiques et de gestion aux FUNDP. Une comparaison des contenus et méthodes de ces cours sera détaillée aussi bien d'un point de vue théorique que sur différents exercices par rapport aux concepts de pente, de taux marginal de substitution, d'élasticité, de productivité marginale et de coût marginal.

Par la suite, nous présenterons et analyserons une expérimentation effectuée auprès d'étudiants en économie afin de mettre en évidence les problèmes liés à ce décalage interdisciplinaire.

Enfin, quelques conclusions et perspectives clôtureront ce travail.

Chapitre 1

Diverses conceptions des économistes

Ce chapitre est dédié à l'analyse de différents ouvrages d'économie afin d'examiner comment les liens entre les variations discrètes et continues y sont traités. Plus précisément, nous nous intéresserons à manière dont les notions de limite et de dérivée sont exploitées pour définir des concepts de microéconomie de base.

A la suite d'une illustration des problèmes que peuvent poser l'approche discrète et continue des notions économiques, nous ferons une analyse globale des manuels étudiés. Ensuite, nous focaliserons notre étude sur les trois concepts suivants : l'élasticité, le coût marginal et le taux marginal de substitution. Enfin, une conclusion sera posée.

Les livres d'économie analysés sont les suivants :

- L'économie - Principes et politiques - Microéconomie [2] de Baumol, Blinder et Scarth
- Introduction à la microéconomie [9] de Donsimoni et D'Ursel
- Microéconomie : théorie et applications [10] de Gauthier et Leroux
- Advanced microeconomie [15] de Jehle et Reny
- Exercices d'économie politique [17] de Jurion
- Eléments de microéconomie [19] de Picard
- Microéconomie [20] de Pindyck, Rubinfield et Sollogoud
- Principes d'économie moderne [22] de Stiglitz et Walsh
- Intermediate Microeconomics [24] de Varian

Les références exactes de ces livres sont répertoriées dans la bibliographie.

1.1 Illustration

Dédions cette section à l'analyse d'un exercice (voir ci-dessous), issu de Jurion - Leclercq [18], afin de mettre en évidence les problèmes que peuvent susciter l'utilisation des notions mathématiques en économie.

> Le tableau ci-dessous exprime le niveau d'utilité totale d'un consommateur en fonction de la quantité qu'il consomme de deux biens donnés A et B. [...]

A \ B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	25	38	48	56	62	67	71	74	76
2	25	43	58	71	82	91	98	103	106	108
3	38	58	74	88	98	106	113	118	121	123
4	48	71	88	103	113	120	126	131	135	137
5	56	82	100	115	126	133	138	143	147	148
6	62	91	108	124	138	145	150	155	157	158
7	67	98	115	130	144	154	160	164	166	167
8	71	103	121	135	148	160	166	170	173	175
9	74	106	124	138	151	162	170	175	178	180
10	76	108	126	140	153	163	172	178	182	184

> 4. Notre consommateur dispose de 1 unité de A et de 8 unités de B. Calculez son taux marginal de substitution du bien B par le bien A. Que devient ce taux marginal de substitution s'il dispose initialement de 4 unités de A et de 2 unités de B? [...]
> 5. Le revenu du consommateur est de 24. Les prix des biens A et B sont respectivement de 4 et de 2. Tracez, sur votre graphique, sa contrainte budgétaire et mesurez-en la pente.
> 6. Dites la quantité de chaque bien qui sera consommée par le dit consommateur si ces biens ne peuvent être consommés par unités indivisibles.
> 7. Vérifiez ce résultat graphiquement. Dites ce que vaut le taux marginal de substitution du bien B par le bien A en la position d'équilibre du consommateur.

A partir de la correction-type de l'exercice donnée par les auteurs (Jurion - Leclercq [18]), nous allons analyser celui-ci.

Dans la première partie du quatrième point de l'exercice, il nous est demandé de calculer un taux marginal de substitution (TMS) du bien B par le bien A. Notons que ce concept est défini par les auteurs de la manière suivante :

> Le taux marginal de substitution exprime la quantité du bien B à laquelle le consommateur est prêt à renoncer pour consommer une unité de A supplémentaire tout en gardant inchangé son niveau de satisfaction. ([18])

Nous savons, par hypothèse, que le consommateur possède au départ une unité de A et huit unités de B. Nous trouvons, donc, son niveau de satisfaction en regardant le tableau (voir Figure 1.1). Celui-ci est de 71.

A\B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	25	38	48	56	62	67	71	74	76
2	25	43	58	71	82	91	98	103	106	108
3	38	58	74	88	98	106	113	118	121	123
4	48	71	88	103	113	120	126	131	135	137
5	56	82	100	115	126	133	138	143	147	148
6	62	91	108	124	138	145	150	155	157	158
7	67	98	115	130	144	154	160	164	166	167
8	71	103	121	135	148	160	166	170	173	175
9	74	106	124	138	151	162	170	175	178	180
10	76	108	126	140	153	163	172	178	182	184

Figure 1.1: Niveau de satisfaction suivant la quantité de biens A et B

Selon les auteurs, pour trouver le taux marginal de substitution du bien B par le bien A, il faut commencer par trouver la quantité de bien B que nous aurons si nous augmentons la quantité de bien A d'une unité et que nous souhaitons rester à un même niveau de satisfaction. En regardant le tableau suivant (Figure 1.2), nous remarquons que la quantité de bien B s'étudiantra à 4 unités.

A\B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	25	38	48	56	62	67	71	74	76
2	25	43	58	71	82	91	98	103	106	108
3	38	58	74	88	98	106	113	118	121	123
4	48	71	88	103	113	120	126	131	135	137
5	56	82	100	115	126	133	138	143	147	148
6	62	91	108	124	138	145	150	155	157	158
7	67	98	115	130	144	154	160	164	166	167
8	71	103	121	135	148	160	166	170	173	175
9	74	106	124	138	151	162	170	175	178	180
10	76	108	126	140	153	163	172	178	182	184

Figure 1.2: Niveau de satisfaction suivant la quantité de biens A et B

Nous obtenons alors un taux marginal de substitution égale à -4 car nous perdons 4 unités de bien B quand nous augmentons le bien A d'une unité et que nous gardons le même niveau de satisfaction. Cette notion de perte est représentée par le signe "$-$".

Avant de poursuivre la correction du quatrième point, remarquons déjà que le taux marginal de substitution est vu comme un rapport de variations de quantités pour un même niveau de satisfaction. Nous pouvons donc noter le taux marginal de substitution de la manière suivante:

$$TMS = \frac{\text{variation de la quantité de bien } B}{\text{variation de la quantité de bien } A}$$

Nous aurions donc pu noter :

$$TMS = \frac{4-8}{2-1} = \frac{-4}{1} = -4.$$

Dans la seconde partie du point 4 de l'exercice, il nous est demandé le TMS du bien B par le bien A en partant d'un panier de biens contenant 4 unités de A et de 2 unités de B. Nous ne pouvons pas procéder de la même manière que précédemment car il n'existe pas de panier de biens qui, pour une augmentation d'une unité de A, reste à un même niveau de satisfaction (c'est-à-dire 71 dans notre cas). Selon les auteurs, il faut alors trouver un panier de biens avec un niveau de satisfaction toujours égal à 71 en augmentant la quantité de bien A. Regardons le tableau ci-dessous (voir la Figure 1.3) de plus près.

A \ B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	25	38	48	56	62	67	71	74	76
2	25	43	58	71	82	91	98	103	106	108
3	38	58	74	88	98	106	113	118	121	123
4	48	71	88	103	113	120	126	131	135	137
5	56	82	100	115	126	133	138	143	147	148
6	62	91	108	124	138	145	150	155	157	158
7	67	98	115	130	144	154	160	164	166	167
8	71	103	121	135	148	160	166	170	173	175
9	74	106	124	138	151	162	170	175	178	180
10	76	108	126	140	153	163	172	178	182	184

Figure 1.3: Niveau de satisfaction suivant la quantité de biens A et B

Les auteurs passent alors du panier de biens $(4,2)$ au panier $(8,1)$ et trouvent un taux marginal de substitution égal à $\frac{-1}{4}$. Nous constatons que la quantité de bien A varie de 4 unités et non plus d'une unité comme précédemment.

Intéressons-nous à cette dernière constatation. Si, pour le calcul du taux marginal de substitution, la variation de quantité de bien A peut être plus grande qu'une unité alors il serait possible pour la première partie du quatrième point de l'exercice de considérer une autre variation que la variation unitaire de la quantité de bien A. Nous pourrions ainsi passer du panier de bien initial, $(1,8)$ au panier de bien, $(8,1)$ qui ont tous deux un niveau de satisfaction similaire. Dans ce cas, le taux marginal de substitution serait :

$$TMS = \frac{1-8}{8-1} = \frac{-7}{7} = -1.$$

Ce taux marginal de substitution est bien différent de celui trouvé précédemment.

Ce premier exercice nous permet de montrer un premier problème dans la résolution d'exercices utilisant une variation unitaire non applicable de façon générale. D'autres problèmes vont être mis en évidence dans la correction d'autres exercices.

Dans le cinquième item de l'exercice, le revenu du consommateur est de 24, le prix du bien A est de 4 et celui du prix B est de 2. Il est demandé de tracer la contrainte budgétaire. Celle-ci est une droite qui a pour équation $4x + 2y = 24$ avec x, la quantité de bien A et y, la quantité de bien B. Ensuite, nous mesurons la pente ou le coefficient angulaire de la droite égal à $\frac{-4}{2} = -2$.

Pour le sixième point, les auteurs invitent à dresser la liste de tous les paniers du tableau qui vérifient la contrainte budgétaire. Cette liste est reprise dans le tableau 1.4.

x	y	Utilité
1	10	76
2	8	103
3	6	106
4	4	103
5	2	82

Figure 1.4: Tableau de la quantité de biens A et B, de leur utilité suivant la contrainte budgétaire

Pour répondre au septième point, remarquons d'abord que le panier $(3, 6)$ est celui qui correspond à l'utilité maximale. Il est assez facile de montrer que le panier (x, y) ayant le maximum d'utilité et respectant la contrainte budgétaire se trouve à l'intersection de la droite budgétaire et de la courbe d'indifférence[1] tangente à cette droite.
Notons qu'il n'existe pas toujours un panier qui est maximum d'utilité, qui suit la contrainte budgétaire et qui est une quantité entière.

Finalement, il est demandé de dire ce que vaut le taux marginal de substitution du bien B par le bien A en cette position $(3, 6)$. Selon la correction des auteurs, il faut prendre un taux marginal de substitution égal à -2 qui correspond à la pente (ou coefficient angulaire) de la droite budgétaire. Comme la droite budgétaire est tangente à la courbe d'indifférence en $(3, 6)$, le calcul de la pente de cette droite revient au calcul du taux marginal de substitution qui est étudié ici comme le rapport des variations infinitésimales de quantités pour un même niveau de satisfaction.

Essayons de calculer ce TMS, de la même façon que dans le point 4. Partant du panier $(3, 6)$, nous cherchons dans le tableau ci-dessous (voir Figure 1.5) un panier pour lequel nous gardons un même niveau de satisfaction (c'est-à-dire 106). Ce panier est celui dont la quantité de bien A est 9 et la quantité de bien B est 2.

[1]Courbe représentant l'ensemble des combinaisons de deux biens qui procurent au consommateur un niveau de satisfaction identique

A \ B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	25	38	48	56	62	67	71	74	76
2	25	43	58	71	82	91	98	103	106	108
3	38	58	74	88	98	106	113	118	121	123
4	48	71	88	103	113	120	126	131	135	137
5	56	82	100	115	126	133	138	143	147	148
6	62	91	108	124	138	145	150	155	157	158
7	67	98	115	130	144	154	160	164	166	167
8	71	103	121	135	148	160	166	170	173	175
9	74	106	124	138	151	162	170	175	178	180
10	76	108	126	140	153	163	172	178	182	184

Figure 1.5: Tableau de la quantité de biens A et B

Nous obtenons donc un taux marginal de substitution égal à $\frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$. Celui-ci est bien différent de ce que les auteurs nous proposaient en travaillant avec ce que l'on appelle une "approche continue" (avec des variations infinitésimales).

En résumé, cet exercice nous a permis de mettre en évidence que la définition du taux marginal de substitution n'est pas toujours appliquée de la même manière ce qui implique des incohérences. Une des causes est la variation unitaire imposée par cette définition que l'on ne trouve pas toujours dans les exercices ainsi que le choix l'on doit faire suivant les données proposées. De plus, suivant celles-ci, l'étudiant est invité à faire un certain choix plutôt qu'un autre sur les variations à utiliser.

Cet exemple d'exercice venant d'un cours d'économie nous montre donc la complexité que les étudiants peuvent ressentir sur la manière d'aborder un exercice d'économie.

Dans la suite de ce mémoire, nous appellerons "approche discrète" une approche considérant une variation discrète, souvent unitaire et "approche continue" celle qui fait intervenir une variation infinitésimale.

En général, les économistes utilisent les concepts économiques sur de très grandes quantités. Par conséquent, l'écart entre l'approche continue ou discrète est considéré comme insignifiant. Mais, dans la plupart des livres d'économie de références, les exemples sont donnés pour de petites quantités comme dans l'exercice ci-dessus. Il est donc important de faire attention au passage d'une approche à l'autre.

C'est pourquoi nous allons étudier les différentes manières dont certains concepts d'économie sont avancés dans la littérature économiste en nous attardant sur les différentes variations utilisées et sur les liens qui sont faits (ou non) entre les aspects discret et continu.

1.2 Analyse globale des manuels étudiés

Cette section nous permet d'avoir une vision générale des ouvrages que nous allons étudier par la suite.

Pour rappel, nous appelons "approche discrète" une approche considérant une variation discrète, souvent unitaire et "approche continue" celle qui fait intervenir une variation infinitésimale.

Suite à l'analyse que nous avons effectuée sur les neuf ouvrages examinés, nous avons constaté que les économistes que nous considérons peuvent être classés en trois catégories. Certains économistes ont une approche principalement discrète des notions économistes comme nous pouvons le voir dans les ouvrages de Stiglitz - Walsh [22], Pindyck - Rubinfield - Sollogoub [20] et Baumol - Blinder - Scarth [2] mais peuvent pour certains concepts utiliser l'approche continue. D'autres économistes tels que Donsimoni - D'Ursel [9] et Jehle - Reny [15] expliquent les concepts économiques essentiellement de manière continue mais certaines explications voire définitions littérales sont quant à elles énoncées dans un cadre discret. Quant aux ouvrages de Gauthier - Leroux [10], Jurion [17], Picard [19] et Varian [24], ils emploient les deux approches d'une manière plus flagrante.

Nous allons nous intéresser aux définitions que les trois catégories d'économistes donnent pour certains concepts d'économie et nous examinerons également les liens qui sont faits entre les deux approches discrète et continue. Pour ce faire, nous allons diviser notre analyse suivant ces notions d'économie : l'élasticité, le coût marginal, puis le taux marginal de substitution.

1.3 Elasticité

Nous commençons par analyser la façon dont les auteurs travaillant, principalement, avec l'approche discrète mettent en place le concept d'élasticité. Nous nous intéresserons par la suite aux auteurs utilisant l'approche continue et enfin nous examinerons la manière de travailler des économistes qui étudient les deux manières de procéder.

Bien qu'il existe divers types d'élasticité (élasticité de la demande, élasticité de l'offre, élasticité du revenu, ...), nous allons essentiellement nous intéresser à l'élasticité-prix de la demande qui est souvent le premier type d'élasticité vu dans les manuels d'économie.

1.3.1 Approche discrète

Dans Microéconomie [20] de Pindyck, Rubinfield et Sollogoud, la définition de l'élasticité de la demande est introduite comme suit.

> l'élasticité-prix de la demande mesure la sensibilité de la quantité demandée aux changements de prix. Elle mesure le pourcentage

de variation de la quantité demandée d'un bien consécutive à l'augmentation de 1% du prix de ce bien.
Notons la quantité Q et le prix P, et écrivons l'élasticité de la demande, E_p de la façon suivante

$$E_p = (\%\Delta Q)/(\%\Delta P)$$

où $\%\Delta Q$ veut dire "variation de Q en pourcentage" et $\%\Delta P$ "variation de P en pourcentage". Le symbole Δ [...] signifie "variation de". [...] Le pourcentage de variation d'une variable est égal à la variation en niveau de cette variable divisée par le niveau initial de la variable [...]
On peut alors réécrire l'élasticité-prix de la demande comme suit :

$$E_p = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{P}{Q}\frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

Une note de bas de page nous dit alors :

> En termes de variations infinitésimales (quand ΔP devient très petit), $E_p = (P/Q)/(dQ/dP)$.

A la suite de la définition de l'élasticité-prix de la demande, un exemple est pris avec une courbe de demande linéaire[2] c'est-à-dire une courbe de demande de la forme $Q = a - bP$.

Notons déjà que la première définition donnée de l'élasticité-prix de la demande parle d'une variation d'un pourcent du prix mais elle n'est plus imposée par la suite car on parlera alors uniquement d'une variation en pourcentage du prix. De plus, même si les auteurs utilisent en général une approche discrète, nous remarquons un petit mot sur les variations infinitésimales. Mais le fait que le passage entre une variation unitaire et continue ne soit pas fait entraine un certain flou de la définition.
Nous trouvons ici trois manières de définir l'élasticité avec des variations considérées chaque fois différentes : des variations discrètes, en pourcentage ou encore infinitésimales. Enfin, notons que la présence d'un exercice avec une courbe de demande linéaire est très familier des exercices d'économie mais implique parfois des définitions trop particulières à ce cas et non applicable de manière générale. Nous y reviendrons par la suite.

Examinons ci-après les deux autres ouvrages qui font appel à une approche discrète du concept d'élasticité.

Dans Principes d'économie moderne [22] de Stiglitz et Walsh, l'élasticité est définie comme suit.

> Pour de nombreuses raisons, les économistes doivent être attentifs à l'inclinaison exacte (prononcée ou peu prononcée) de la pente

[2]Les économistes qualifient de *demande linéaire* une fonction de demande qui est en fait affine en la variable prix.

> de la courbe de demande. Pour calculer cette pente avec précision ils utilisent la notion d'élasticité-prix de la demande (parfois plus simplement appelée élasticité-prix ou élasticité de la demande). L'élasticité-prix de la demande se définit comme la variation en pourcentage de la quantité demandée divisée par la variation en pourcentage du prix.

Nous remarquons dans cette dernière définition une petite contradiction : d'un coté les auteurs veulent calculer la pente de la courbe de demande avec précision et de l'autre ils nous donnent une définition qui ne considère pas des variations infiniment petites mais des variations de type discret. Notons encore que "la pente de la courbe" est une appellation correcte si l'on considère que la courbe est une droite car sinon il s'agit de la pente de la tangente à la courbe en un point.

Baumol, Blinder et Scarth [2], quant à eux, nous proposent la définition d'élasticité-prix de la demande suivante.

> L'élasticité-prix de la demande correspond au ratio de la variation en pourcentage de la demande sur la variation en pourcentage du prix ayant provoqué la variation de la demande en cause.
>
> [...]
> La formule de l'élasticité présente deux caractéristiques :
>
> 1. Elle ne s'exprime qu'en pourcentages.
> 2. Elle se calcule comme un pourcentage de la moyenne des quantités ou des prix.
>
> De plus la formule élimine tous les signes négatifs
>
> Nous pouvons maintenant établir la formule de l'élasticité de la demande en gardant à l'esprit toutes ses caractéristiques :
> L'élasticité-prix de la demande =
>
> $$\frac{\text{Variation de la quantité demandée en pourcentage de la moyenne des deux quantités}}{\text{Variation du prix en pourcentage de la moyenne des deux prix}}.$$
>
> [...]
> Pour faciliter la consultation, nous présentons, au tableau [Figure 1.6], une forme succincte du calcul de l'élasticité pour un exemple

	Prix	Quantité
Situation 1	$P_1 = 12$	$Q_1 = 17$
Situation 2	$P_2 = 8$	$Q_2 = 23$
Variation	$P_1 - P_2 = 12 - 8 = 4$	$Q_2 - Q_1 = 23 - 17 = 6$
Moyenne	$(P_1 + P_2)/2 = 20/2 = 10$	$(Q_2 + Q_1)/2 = 40/2 = 20$
Pourcentage	$4/10 = 40\%$	$6/20 = 30\%$
Élasticité = % de la variation de la quantité / % de la variation du prix = 30/40 = 0,75		

Figure 1.6: Calcul de l'élasticité-prix de la demande

Nous remarquons une certaine différence entre ces doubles définitions de l'élasticité-prix de la demande. En effet, si nous reprenons l'exercice ci-dessus (Figure 1.6) et que nous appliquons la première définition proposée par les auteurs, nous obtenons :

$$\text{Elasticité de la demande} = \frac{\frac{23-17}{17}}{\frac{8-12}{12}} = -1,06.$$

En suivant l'une ou l'autre des définitions, nous obtenons des réponses différentes.

En regard des trois ouvrages consultés, nous pouvons déjà noter que ces auteurs ont diverses conceptions vis-à-vis de l'élasticité pour laquelle ils donnent plusieurs définitions.

1.3.2 Approche continue

Passons à l'analyse des auteurs qui privilégient un cadre où toutes les fonctions sont continues et différentiables et qui ont dès lors uniquement recours à des variations continues.

Selon Jehle et Reny [15], l'élasticité de la demande est déterminée de la manière suivante.

> **Definition : Demand Elasticities**
> Let $x_i(p, y)$ be the consumer's Marshallian[3] demand for good i. Then let [...]
>
> $$\epsilon_{ij} \equiv \frac{\partial x_i(p, y)}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_i(p, y)}$$
>
> [...]
> The symbol ϵ_{ij} denotes the **prices elasticity** of demand for good i, and measures the percentage change in the quantity of i demanded per 1 percent change in the price p_j. If $j = i$, ϵ_{ij} is called the **own-price elasticity** of demand for good i.

[3]Le consommateur Marshallien ajuste sa satisfaction maximale (U max) aux fluctuations de ces variables. Ainsi, il compense une hausse de prix par une baisse de sa satisfaction.

Nous constatons également que les auteurs parlent d'une variation d'un pourcent (quand ils expliquent la définition de manière littérale) alors que ce sont des variations infiniment petites qui sont utilisées avec les dérivées partielles.

Dans Introduction à la microéconomie de Donsimoni et D'Ursel [9], la définition, au sens large, de l'élasticité est introduite de la manière suivante.

> [L'élasticité exprime] l'effet d'un changement en pourcentage d'une variable suite à l'augmentation en pourcentage de l'une des variables dont elle dépend. En tenant compte de la valeur initiale des variables, l'élasticité est un nombre qui exprime la sensibilité de l'une à l'autre indépendamment des unités dans lesquelles elles sont mesurées.
>
> Par définition, si $y = h(x, z)$, alors
>
> $$\epsilon(y, x) = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{\partial h(x, z)}{\partial x} \cdot \frac{x}{y}$$
>
> est l'élasticité de y par rapport à x au point considéré.

Nous remarquons une certaine similitude entre les deux citations ci-dessus car les auteurs utilisent des dérivées partielles pour exprimer l'élasticité. Nous observons aussi que, même chez ces auteurs purement "continus", la définition littéraire s'appuie sur des variations discrètes.

1.3.3 Double approche discrète et continue

Nous allons maintenant nous intéresser aux auteurs qui utilisent les deux approches discrète et continue pour travailler. Nous essayerons de mettre en évidence les liens qui sont faits (ou non) entre celles-ci.

Selon Jurion [18], l'élasticité-prix de la demande se définit comme suit.

> on définit l'élasticité-prix de la demande comme le rapport entre la variation proportionnelle de la quantité demandée du bien et la variation proportionnelle de son prix :
>
> $$e = e_{(x_i, p_i)} = \frac{\frac{\Delta x_i}{x_i}}{\frac{\Delta p_i}{p_i}} = \frac{\Delta x_i}{\Delta p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i}$$
>
> [...]
> Comment calculer, en pratique, le coefficient d'élasticité de la demande par rapport au prix? [...]
>
> [On propose] généralement, de choisir pour p_i et x_i la moyenne arithmétique des valeurs initiales et finales de ces variables :
>
> $$e = \frac{\frac{\Delta x_i}{(x_i^1 + x_i^2)/2}}{\frac{\Delta p_i}{(p_i^1 + p_i^2)/2}}$$

Les variations employées ne sont pas explicitement notées unitaires ou infiniment petites même si nous pourrions penser que ce sont des variations de type discret au vu de la seconde définition mais cela n'est jamais précisé. De plus, dans le solutionnaire ([16]) d'un exercice (voir ci-dessous) proposé en fin de chapitre, Jurion utilise la variation infinitésimale.

> Un consommateur a le choix uniquement entre deux biens, a et b, de prix unitaires respectifs p_a et p_b.
> La demande pour ces biens s'exprime comme suit :
>
> - pour le bien a : $x_a = \frac{5R}{6p_a}$
> - pour le bien b : $x_b = \frac{R}{4p_b}$
>
> où R est le revenu du consommateur.
> Calculez [...] l'élasticité-prix de la demande pour le bien b. Quelles sont les conclusions que pouvez-vous en tirer? [...]
> Elasticité-prix de la demande pour le bien b :
>
> $$e_{x_b,p_b} = \frac{\frac{\Delta x_b}{x_b}}{\frac{\Delta p_b}{p_b}} = \frac{\Delta x_b}{\Delta p_b}\frac{p_b}{x_b} = \left(-\frac{1}{p_b^2}\frac{R}{4}\right)\frac{p_b 4p_b}{R} = -1 \text{ (élasticité unitaire)}$$
>
> La dépense du consommateur pour le bien b reste constante quel que soit son prix unitaire. (Jurion - [17])

Nous constatons que Jurion a choisi sa première définition de l'élasticité de la demande pour répondre à cet exercice. Il a, en outre, employé des variations infiniment petites car il travaille avec la dérivée. Cette dérivée reste tout de même assez cachée. C'est en voyant la réponse que nous pouvons nous apercevoir qu'elle a été utilisée. Un étudiant aurait-il été capable de calculer cette élasticité uniquement à partir de la définition? Rien n'est moins sûr. Le fait que le type de variation ne soit pas explicitement exprimé entraine un certain flou de la définition.

Continuons en analysant la façon dont Varian [24] met en place le concept d'élasticité-prix de la demande.

> The *price elasticity of demand*, ϵ, is defined to be the percent change in quantity divided by the percent change in price. [...] In symbols the definition of elasticity is
>
> $$\epsilon = \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}.$$
>
> Rearranging this definition we have the more common expression :
>
> $$\epsilon = \frac{p}{q}\frac{\Delta q}{\Delta p}.$$
>
> Hence elasticity can be expressed as the ratio of price to quantity multiplied by the slope[4] of the demand function. In the Appendix

[4]slope of demand function $= -\frac{\Delta q}{\Delta p}$ (Varian - [24])

> to this chapter we describe elasticity in terms of the derivative of the demand function. If you know calculus, the derivative formulation is the most convenient way to think about elasticity. [...] In terms of derivatives the price elasticity of demand is defined by
>
> $$\epsilon = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}.$$

Varian laisse penser que les deux définitions sont équivalentes pour autant qu'on "connaisse" le calcul différentiel mais sans expliquer réellement les liens entre les deux.

Gauthier et Leroux [10] pour leur part définissent l'élasticité de la demande de la manière suivante.

> L'élasticité-prix de la demande est une mesure de la sensibilité des variations relatives de la quantité demandée aux variations relatives du prix.
> On pourra aussi dire que l'élasticité-prix de la demande, c'est le rapport du ***pourcentage*** de la variation de la quantité demandée d'un bien sur le ***pourcentage*** de la variation du prix de ce bien.
>
> $$E_P = \frac{\%\text{variation de la quantité demandée}}{\%\text{variation du prix}} = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta P}$$
>
> Ceci peut s'écrire de la façon suivante :
>
> $$E_P = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P}{Q}$$
>
> Ainsi si l'on dit que l'élasticité-prix de la demande d'un bien X est de -2, cela veut dire par exemple que si j'augmente le prix de X de 1% la quantité demandée de X va diminuer de 2%. [...]
> En supposant que la fonction de demande est définie, continue et dérivable, on écrira :
>
> $$E_P = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$$
>
> [...]
> dP/dQ étant la dérivée de la fonction de demande en un point, c'est-à-dire la pente de la fonction de demande. Ainsi une droite à pente constante aura une élasticité variable vu que P/Q varie le long de la droite.

Nous remarquons ici que les auteurs donnent l'impression que les deux définitions donneront la même réponse. Or, ce n'est pas le cas car l'élasticité continue est une approximation de l'élasticité discrète.

Pour finir, examinons la définition de Picard [19].

On appelle élasticité-prix directe de la demande en bien h le rapport de la variation relative de la consommation de bien h à la variation relative du prix du bien h, c'est-à-dire en notant ϵ_h cette élasticité :

$$\epsilon_h = \frac{\frac{\Delta x_h}{x_h}}{\frac{\Delta p_h}{p_h}}.$$

De manière équivalente, *l'élasticité-prix directe ϵ_h mesure le pourcentage de variation de consommation de bien h qui résulte d'une augmentation de 1% du prix de ce bien.*
Si on considère de petites variations dx_h et dp_h, nous obtenons :

$$\epsilon_h = \frac{\frac{dx_h}{x_h}}{\frac{dp_h}{p_h}} = \frac{\frac{\partial x_h}{\partial p_h} p_h}{x_h}.$$

Le calcul de la dérivée partielle $\partial x_h / \partial p_h$ permet donc de calculer ϵ_h.

Picard est le seul qui souligne le fait que les deux définitions font référence à des variations différentes. Nous pouvons donc dire que cette définition est la plus correcte.

En bref, l'analyse du concept d'élasticité nous a permis de mettre différentes remarques en évidence. Les auteurs ne précisent pas nécessairement la variation de prix employée ni le type d'élasticité considérée : élasticité en un point ou élasticité moyenne. Ce manque de précision pourrait entrainer des erreurs lorsque l'étudiant rencontre des exercices où les variations de prix sont différentes. Ensuite, nous avons noté que les auteurs préféraient utiliser une courbe de demande linéaire mais comme le dit Jurion : "*Si l'on représente souvent le barème de demande par une droite, c'est uniquement par souci de simplicité. Rien, en effet, ne garantit qu'il en soit bien ainsi*" *([18])*. Ceci peut engendrer une conception fausse selon laquelle l'élasticité de demande serait indépendante de la variation de prix. Enfin, le passage d'une définition de type discret à une définition de type continu n'étant pas toujours fait, nous pouvons nous attendre à une "séparation mentale" pour les étudiants lors des exercices. Ils envisageraient alors deux définitions : une dans le cas discret où l'élasticité serait le quotient des variations relatives de la demande et du prix et l'autre dans le cas continu où elle serait le produit de la dérivée de la fonction de demande en un point par le quotient du prix et de la quantité.

1.4 Coût marginal

Nous poursuivons notre analyse sur une autre notion : le coût marginal. Celle-ci n'intervient pas dans le même contexte que l'élasticité. Les coûts sont présents dans la théorie du producteur alors que l'élasticité étudiée ci-dessus correspond à la théorie du consommateur.

Comme dans la section précédente, nous ferons d'abord une analyse des ouvrages à orientation discrète puis nous traiterons ceux de type continu pour fini par l'étude des manuels qui utilisent les deux approches continue et discrète.

Afin de bien comprendre la notion de coût marginal, nous introduisons plusieurs définitions venant des ouvrages étudiés.

- Certains coûts varient avec le niveau de production, alors que d'autres restent inchangés tant que l'entreprise produit. [...] Nous décomposons donc le coût total (CT ou C) en deux composants.

  1. Le **coût fixe** (CF) : coût qui ne varie pas avec le niveau de production et qui ne peut être éliminé qu'en se retirant du marché
  2. Le **coût variable** (CV) : coût qui varie en fonction du niveau de production.

  (Pindyck - Rubinfield - Sollogoub [20])

- On appelle coût moyen (ou coût unitaire) le coût total de production divisé par la quantité produite, soit en notant C_M le coût moyen :

$$C_M(y) = \frac{CT(y)}{y}$$

  (Picard [19])

1.4.1 Approche discrète

Regardons les définitions du coût marginal de type discret. Commençons en examinant la définition donnée dans le livre de référence des étudiants bacheliers de première année en sciences économiques à Namur (Stiglitz et Walsh - [22]).

> Coût marginal : coût supplémentaire pour produire une unité supplémentaire

Notons que cette définition est prise d'un résumé de fin de chapitre car elle ne se trouve pas explicitement dans le texte principal de ce livre. Ce concept de coût marginal est plutôt vu à l'aide d'exemples ainsi que sur les graphiques suivants (Figure 1.7, Figure 1.8 et Figure 1.9).

La légende qui accompagne ces trois graphiques est la suivante.

> Le coût marginal se définit comme la variation du coût total résultant de l'accroissement d'une unité de la production (figure 1.7). Le coût marginal est donc égal à la pente de la courbe de coût total en un point donné (soit $\Delta C/\Delta Q$) (figure 1.8). La courbe de coût marginal correspondant à l'exemple du producteur de blé est représentée dans la figure 1.9. Cette courbe, comme la courbe de coût total, a une pente de plus en plus forte

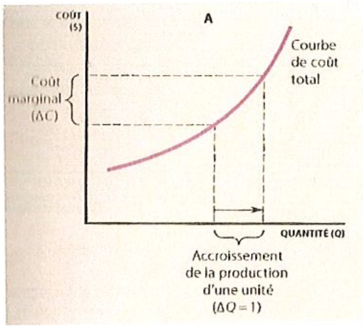


Figure 1.7: Coût marginal et courbe de coût marginal A

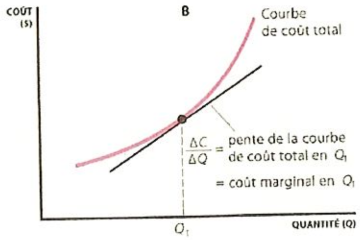


Figure 1.8: Coût marginal et courbe de coût marginal B

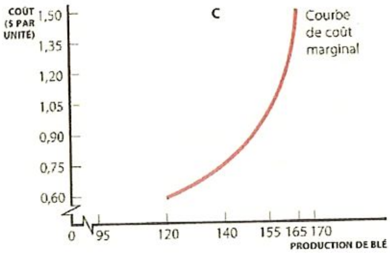


Figure 1.9: Coût marginal et courbe de coût marginal C (quantité en millions d'unité)

Remarquons, pour commencer, que les auteurs passent facilement de variations unitaires à la pente de la courbe car ils la définissent comme *la modification d'une variable située sur l'axe vertical due à la modification d'une unité d'une variable située sur l'axe horizontal* . Pourtant quand nous observons la figure 1.8, nous avons l'impression que l'on considère la pente de la tangente à la courbe de coût total en un point ce qui implique que l'on prendrait alors en compte une variation infinitésimale. Bien entendu quand les quantités que l'on traite sont très grandes comme c'est le cas pour la figure 1.9, ces variations peuvent être considérées comme équivalentes. Le problème est bien ici que l'on veut utiliser une fonction de coût total continue avec une définition du coût marginal discret. Cela peut bien entendu engendrer chez l'étudiant un certain flou sur la définition du coût marginal.

Analysons ci-après les deux autres ouvrages ayant une approche discrète des définitions.

Pour Pindyck - Rubinfield - Sollogoub [20], le coût marginal se définit comme suit.

> Le coût marginal [...] est l'accroissement du coût correspondant à la production d'une unité supplémentaire [...] Nous pouvons donc exprimer le coût marginal de la façon suivante :
>
> $$Cm = \frac{\Delta CV}{\Delta q} = \frac{\Delta CT}{\Delta q}$$

Dans le livre de Baumol, Blinder et Scarth [2], nous lisons la définition suivante.

> Pour déterminer le *coût marginal* (CM), nous devrons savoir ce qu'il adviendrait du coût total, si nous augmentions la production d'une unité. [...]
> La courbe de coût marginal (CM) indique, pour chaque niveau de production possible, l'accroissement du coût total que doit consentir l'entreprise pour augmenter sa production d'une unité.
> Géométriquement, CM est la pente de la courbe CT. En symboles :
>
> $$CM = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$$

Nous remarquons qu'en un mot "géométriquement" Baumol, Blinder et Scarth passent d'une variation unitaire à une variation infinitésimale car ils considèrent que le coût marginal est la pente de la courbe CT ce qui ne peut être correct que, si en chaque point de CT, le coût marginal vaut le coefficient angulaire de la tangente à la courbe de coût total. Dans le cas où l'on souhaiterait rester avec une variation unitaire, le terme "pente de la courbe" ne pourrait pas être utilisé car on ne calculerait alors que le coût marginal pour chaque unité de quantité et l'on pourrait tout au plus calculer le coefficient de la droite passant par les deux points considérés pour le calcul de la marge.

1.4.2 Approche continue

Passons à l'analyse des ouvrages à connotation continue.

Dans Advanced microeconomie [15] de Jehle et Reny, on ne parle pas de coût marginal mais d'une fonction coût à minimiser.
Donsimoni et D'Ursel [9], pour leur part, donne la définition de coût marginal suivante.

> Par définition, la fonction de coût total $c(q)$ indique le coût total CT minimum attaché à la production d'une quantité q d'output, la technologie de production et le prix des facteurs de production étant donnés :
>
> $$CT = c(q).$$
>
> [...]
> nous faisons une première hypothèse simplificatrice selon laquelle le coût total varie infinitésimalement suite à un changement infinitésimal de la quantité produite, pourvu que celle-ci soit strictement positive. [...]
> Nous ferons ensuite une seconde hypothèse, plus restrictive, et selon laquelle la fonction de coût total $c(q)$ est différentiable si $q > 0$.
> Cette hypothèse conduit tout naturellement à la définition de la fonction de coût marginal :
>
> $$Cm(q) = \frac{\partial c(q)}{\partial q} = \frac{dCT}{dq} = \frac{dCTV}{dq},$$
>
> comme celle indiquant l'incidence sur le coût total (variable) d'un accroissement infinitésimal de la quantité produite.

Les auteurs se placent ici dans un cadre où toutes les fonctions sont continues et différentiables et ils considèrent donc seulement des variations continues. Mais nous constatons que comme pour l'élasticité les variations unitaires sont utilisées pour la définition littérale du concept.

1.4.3 Double approche discrète et continue

Examinons plus précisément comment est abordé le concept de coût marginal dans les quatre manuels d'économie qui utilisent alternativement des variations discrètes et continues.

Commençons par le manuel de Jurion [18] qui donne la définition suivante.

> Le coût marginal (Cm) est le coût de production de l'unité en sus[5]. Il se définit donc comme le coût additionnel imposé à l'entreprise par la production d'une unité de bien supplémentaire :
>
> $$Cm = \frac{\Delta CT}{\Delta q}$$
>
> [...] Le coût marginal, correspondant à [une] production q_0, se représente, pour une variation infiniment petite du volume de production de la firme, par la pente de la tangente à la courbe du coût total en [un point] C [coût total à payer pour la quantité q_0]

[5] en plus

Nous constatons que la définition en tant que telle du coût marginal est purement discrète mais que c'est seulement lors de la représentation graphique que Jurion va considérer une variation infinitésimale sans explication sur le passage d'une variation à l'autre. Ce manque d'explications peut nuire à la compréhension des lecteurs.

Pour sa part, Varian [24] utilise, dans son texte principal, l'approche discrète pour expliquer le coût marginal. La définition de celle-ci est introduite de la manière suivante :

> There is one more cost curve of interest : the marginal cost curve. The marginal cost curve (MC) measures the changes in costs for a given change in output. That is, at any given level of output y, we can ask how costs will change if we change by some amount Δy :
>
> $$MC(y) = \frac{\Delta c(y)}{\Delta y} = \frac{c(y + \Delta y) - c(y)}{\Delta y}.$$
>
> Often we think of Δy as being one unit of output, so that marginal cost indicates this change in our costs if we consider producing one more discrete unit of output. If we are thinking of the production of a discrete good, then marginal cost of producing y units of output is just $c(y) - c(y - 1)$. This is often a convenient way to think about marginal cost, but is sometimes misleading. Remember, marginal cost measures a rate of change : the change in costs divided by change in output. If this change in output is a dingle unit, then marginal cost looks like a simple change in costs, but it is really a rate of change as we increase the output by one unit. (Varian [24])

Nous remarquons que Varian parle de la courbe de coût marginal et non du coût marginal en tant que tel. Cette notion est donc essentiellement vue comme une notion géométrique. Nous remarquons aussi, qu'à la suite de cette définition, Varian donne une explication de la vision discrète et continue du coût marginal. Mais la définition continue du coût marginal n'est pas encore vraiment formalisée. Pour ce faire, Varian utilise un appendice qui a une orientation plus mathématique. Son approche est la suivante :

> In the text we claimed that average variable cost equals marginal cost for the first unit output.
> In calculus terms this becomes
>
> $$\lim_{y \to 0} \frac{c_v(y)}{y} = \lim_{y \to 0} c'(y).$$
>
> The left-hand side of this expression is not defined at $y = 0$. But its limit is defined, and we can compute it using l'Hôpital's rule [...].
> Applying this rule, we have
>
> $$\lim_{y \to 0} \frac{c_v(y)}{y} = \frac{\lim_{y \to 0} \frac{dc_v(y)}{dy}}{\lim_{y \to 0} \frac{dy}{dy}} = \frac{c'(0)}{1},$$

which establishes the claim.

We also claimed that the area under the marginal cost curve gave us variable cost. This is easy to show using this fundamental theorem of calculus. Since

$$MC(y) = \frac{dc_v(y)}{dy}$$

we know that the area under the marginal cost curve is

$$c_v(y) = \int_0^y \frac{dc_v(x)}{dx} dx = c_v(y) - c_v(0) = c_v(y).$$

(Varian [24])

Notons qu'au départ Varian ne définit pas explicitement le coût marginal "continu" mais il se place dans un cadre continu pour prouver formellement un résultat. Remarquons aussi que l'on fait appel ici à une limite pour une quantité, y, qui tend vers zéro mais il ne sera pas explicitement dit que la variation de quantité est dans ce cas une variation infinitésimale. Pour ce qui est de la seconde preuve, nous remarquons que Varian définit clairement le coût marginal "continu".

Regardons comment la notion de coût marginal est abordée par Gauthier - Leroux [10].

Le coût marginal est une fonction des quantités produites. Il décrit l'évolution du coût additionnel de production. Par définition, il est égal au rapport de la variation du coût total sur la variation de la quantité.

$$Cm = f(Q) = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$$

Si on a des variations unitaires de la quantité, on peut dire que le coût marginal est le coût de la production de la dernière unité produite. Si on envisage des variations continues, on définira le coût marginal de la façon suivante :

$$Cm = f(Q) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{dCT}{dQ}$$

Ces deux économistes séparent systématiquement l'approche discrète de l'approche continue en veillant à rester cohérents d'un point de vue mathématique. Ils les introduisent, contrairement à Varian, dans le corps de texte et ils utilisent comme celui-ci la notion de limite mais d'une manière différente car ils s'en servent pour faire le lien entre les deux approches. De plus, ils mettent bien en évidence que les deux définitions concernent des variations de quantités différentes et peuvent donc conduire à des réponses différentes.

Finalement, examinons la vision de Picard [19]. Celui-ci définit le coût marginal de la manière suivante :

On appelle coût marginal le supplément de coût de production engendré par la production de une unité supplémentaire. Si nous notons C_m ce coût marginal, et si la fonction de coût est différentiable, le coût marginal C_m est égal à la dérivée de la fonction de coût total qui elle-même est égale à la dérivée du coût variable [...] :

$$C_m(y) = CT'(y) = CV'(y).$$

Picard passe d'une définition discrète en parlant d'une unité supplémentaire (en italique) à une définition continue sans faire de liens. Il assimile donc une variation unitaire à une variation infinitésimale. Ces deux variations sont pourtant loin d'être proches quand on considère de petites quantités comme c'est souvent le cas lors d'exercices d'économie. Il ne précise pas ici les variations utilisées pour la définition continue du coût marginal contrairement à ce qu'il avait fait pour l'élasticité. Nous analyserons encore son approche sur une troisième notion.

1.5 Taux marginal de substitution (technique)

Analysons, dans cette section, la notion de taux marginal de substitution que nous avons déjà examiner dans l'illustration qui débute ce mémoire. Nous nous attarderons plutôt sur les auteurs qui mettent en évidence les deux approches continue et discrète.

Débutons, tout de même, en examinant une définition de type discret du taux marginal de substitution qui a été illustré au début de ce travail. Nous pouvons lire, dans le livre de Stiglitz et Walsh [23], la définition suivante.

> Le terme technique utilisé pour désigner la pente d'une courbe d'indifférence est le taux marginal de substitution. Ce dernier indique quelle quantité d'un bien un consommateur est *disposé* à sacrifier en échange d'une unité supplémentaire d'un autre bien.

Selon cette définition, il n'est possible de calculer le taux marginal de substitution que si l'on peut échanger une quantité d'un bien pour une quantité d'un autre bien. Or, ce n'est pas toujours le cas. Rappelons-nous de l'illustration où les données sur les quantités n'étaient pas forcément disponibles pour une variation unitaires.

Passons à l'analyse des manuels ayant recours à l'approche continue et discrète.

Intéressons-nous à la façon dont Picard définit le taux marginal de substitution technique[6].

[6] Le taux marginal de substitution technique est la pendant du taux marginal de substitution de la théorie du consommateur où on souhaite garder un même niveau de satisfaction tandis que le taux marginal de substitution technique concerne la théorie de la production où l'on désire rester à un même niveau de production.

Par définition, le taux marginal de substitution technique du facteur k au facteur h est égal à la quantité additionnelle de facteur k dont l'entreprise doit disposer pour remplacer une unité de facteur h tout en maintenant la production à un niveau inchangé.
Si l'entreprise produit une quantité y à l'aide de facteurs en quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$, on a :

$$y = f(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Considérons des variations infinitésimales $dz_1, dz_2, \ldots, dz_n$. Celles-ci conduisent à une variation de la production dy définie par la différentielle totale de la fonction de production, soit :

$$dy = \frac{\delta f}{\delta z_1} dz_1 + \frac{\delta f}{\delta z_2} dz_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta z_n} dz_n.$$

Supposons que seules varient les quantités de facteurs h et k [...].
On en déduit :

$$dy = \frac{\delta f}{\delta z_h} dz_h + \frac{\delta f}{\delta z_k} dz_k.$$

Si les variations dz_h et dz_k sont telles qu'elles ne modifient pas le volume de production on a $dy = 0$ et donc :

$$-\frac{dz_k}{dz_h} = \frac{\frac{\delta f}{\delta z_h}}{\frac{\delta f}{\delta z_k}}.$$

Cette égalité reste approximativement vraie pour des petites variations Δz_h et Δz_k qui maintiennent la production à un niveau inchangé :

$$-\frac{\Delta z_k}{\Delta z_h} \simeq \frac{\frac{\delta f}{\delta z_h}}{\frac{\delta f}{\delta z_k}}.$$

(Picard [19])

Nous remarquons que Picard [19] commence son exposé de la même manière que pour le coût marginal. Il définit littéralement le concept de taux marginal de substitution technique en utilisant l'approche discrète. Nous constatons aussi que, même s'il ne fait pas réellement de liens entre l'approche discrète et continue du taux marginal de substitution, il prend le temps de revenir au discret après son analyse continue pour montrer que ces résultats restent vrais dans le cadre discret. Il parle de variations infinitésimales ainsi que d'approximations. Comme, pour l'élasticité, Picard met ici en avant que l'on emploie des variations infinitésimales pour la dérivée. Donc, les différents types de variations sont bien mis en exergues mais on ne fait pas, ici, assez la distinction entre les deux définitions qui donnent des résultats différents. Notons également que la quantité est ici exprimée comme une fonction de divers facteurs ce qui la différencie des autres définitions.

Gauthier et Leroux, quant à eux, définissent le concept de taux marginal de substitution technique de la manière suivante :

> Le taux marginal de substitution technique mesure le nombre d'unités d'un facteur de production que l'on doit ajouter, ou retrancher, afin de maintenir le niveau de production constant, après avoir retranché, ou ajouté, une unité de l'autre facteur de production.
>
> $$TmST_{L \text{ à } K} = \frac{\Delta K}{\Delta L}$$
>
> C'est donc le taux auquel on peut échanger les facteurs de production tout en gardant le même niveau de production.
> Si nous envisageons des variations infinitésimales dans les quantités de facteur, on peut dire que
>
> $$TmST = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{dK}{dL}$$
>
> Graphiquement, le taux marginal de substitution est représenté par la ***pente de la tangente en un point*** sur l'isoquante[7].

Notons qu'une nouvelle fois Gauthier et Leroux font une distinction entre les deux approches. De plus, comme la plupart des économistes, ils font appel à la vision géométrique du concept. Cette définition analogue à celle du coût marginal semble être la seule qui soit correcte.

Enfin, Jurion [18] propose de définir le taux marginal de substitution entre les facteurs de production (c'est-à-dire taux marginal de substitution technique) de la manière suivante.

> le taux marginal de substitution [du travail par le capital] exprime la quantité additionnelle de capital que la firme devra utiliser pour compenser la perte d'une unité du facteur travail si elle désire, par ailleurs, maintenir inchangé son volume de production maximum :
>
> $$r_{KL} = \left(-\frac{\Delta K}{\Delta L}\right)_{production-q-constante}$$
>
> [...]
> Graphiquement, en supposant des variations infiniment petites des quantités employées des facteurs de production, le taux marginal de substitution se représente par la valeur absolue de la pente de la tangente à l'isoquante au point correspondant à la combinaison de facteurs de production actuellement utilisée par la firme :
>
> $$r_{KL} = \lim_{\Delta L \to 0} \left(-\frac{\Delta K}{\Delta L}\right)_{\text{q. cste}}$$

[7] Soit une fonction de production, [...] $f(K, L)$ où K et L sont des facteurs de production [...]
Une **isoquante** est le lieu des points représentatifs des combinaisons de facteurs K et L aboutissant au *même* niveau de production. (Gauthier - Leroux [10])

Nous remarquons que Jurion traite le taux marginal de substitution entre les facteurs de production comme le font Gauthier et Leroux pour le taux marginal de substitution technique. Soulignons encore que Jurion définit aussi le taux marginal de substitution dans la théorie du consommateur d'une manière analogue à celui entre les facteurs de production ce qu'il ne faisait pas dans une versions précédentes du livre d'Economie politique [18]. Ceci peut-être considéré comme un amélioration car la définition est alors plus claire et précise.

1.6 Conclusion

Cette analyse de la littérature économiste nous a permis de soulever plusieurs points problématiques.

Nous nous sommes aperçus que les différents auteurs réalisaient des transpositions différentes des concepts analysés. Certains comme Baumol, Blinder et Scarth [2], Pindyck, Rubinfield et Sollogoud [20] et Stiglitz et Walsh [22] privilégient une approche discrète en considérant principalement des variations unitaires mais utilisent parfois des concepts continus en gardant cette variation ce qui nous a conduit à mettre en évidence quelques incohérences. D'autres économistes comme Donsimoni et D'Ursel [9] et Jehle et Reny [15] considèrent uniquement l'aspect continu en se plaçant dans un cadre où toutes les fonctions sont continues et suffisamment différentiables. Mais ils ont recours à des définitions littérales de type discret sans mettre en avant que ces définitions peuvent donner des résultats distincts. Nous avons donc remarqué que ces cinq économistes étudiés ne font pas d'approches purement discrète ou continue. D'autres encore comme Varian [24], Gauthier et Leroux [10], Jurion [17] et Picard [19] utilisent les deux approches de façon plus marquée. Il semble alors parfois évident de transformer une variation unitaire en une dérivée ou en la pente de la tangente correspondante. Mais nous avons aussi trouvé des développements rigoureux utilisant des variations devenues infiniment petites ainsi que des explications qui pointaient bien les différences de variations menant à des réponses différentes.

Ces problèmes avec les variations peuvent s'expliquer au regard de l'histoire des mathématiques et de l'économie. En effet, la notion d'infiniment petit a fortement évolué au cours des siècles. Depuis l'Antiquité avec Archimède puis bien plus tard au XVII$^{\text{ème}}$ siècle avec notamment Cavalieri, Pascal, Fermat et Barrow, l'existence de l'infiniment petit a plusieurs fois été questionnée. Elle fut principalement admise par Newton et puis surtout Leibniz et a été utilisée pour découvrir les grands résultats du calcul différentiel. A partir du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, après avoir été rejetée par D'Alembert (entre autres), elle a évolué vers la notion de limite avec Cauchy et Weierstrass. Pour les économistes, la variation unitaire a été considérée, intuitivement, comme infiniment petite si la quantité globale étaient suffisamment grande. De nos jours, les théories des économistes sont tiraillées entre deux raisonnements : le raisonnement intuitif qui envisage la variation unitaire égale à la variation infinitésimale si la quantité globale est grande et le raisonnement mathématique avec le passage à la limite.

Enfin, cette multitude de définitions pour un même concept peut, en partie, être expliquée par la transposition didactique. En effet, au départ, des chercheurs vont former un certain *savoir savant*, celui-ci est présenté dans des publications spécifiques ou lors de congrès entre spécialistes. A partir de ce savoir, chaque auteur va essayer de retirer ce qui l'intéresse en adaptant ce savoir savant, souvent, à des fins didactiques et, par cela, faire des "savoirs enseignés", des savoirs différents des savoirs savants.

Grâce à cette analyse, nous avons pu percevoir un certain flou dans la définition des différentes notions. C'est pourquoi nous allons, dans le prochain chapitre, nous concentrer sur la manière dont les notions sont étudiées en premier bachelier et sur les problèmes cognitifs que cela peut impliquer.

Chapitre 2

Analyse comparative des cours donnés en première année de bachelier en sciences économiques à Namur

Ce chapitre est consacré à la description et à l'analyse en parallèle du cours de Mathématiques pour l'économie et la gestion 1 ([23]) donné par Suzanne Thiry et du cours d'Introduction aux faits et mécanismes économiques ([7]) d'Alain De Crombrugghe pour les concepts faisant appel aux notions de limite et de dérivée afin de relever les difficultés que les étudiants en première année de bachelier en sciences économiques à Namur peuvent rencontrer.

Nous commencerons en décrivant de manière générale les différents chapitres ou parties des deux cours. Ensuite, nous comparons la manière dont les concepts de pente, de productivité marginale, de taux marginal de substitution, d'élasticité et de coût marginal sont vus en mathématique et en économie aussi bien par rapport à la théorie qu'aux exercices. Enfin, une conclusion sera posée.

2.1 Généralités

Examinons la construction des deux cours.

Le cours de Mathématiques pour l'économie et la gestion 1 ([23]) est séparé en cinq chapitres :

1. Les espaces euclidiens
2. Fonctions de plusieurs variables : limites et continuité
3. Dérivation de fonctions de plusieurs variables
4. Optimisation à plusieurs variables
5. Introduction aux intégrales doubles

Chaque chapitre possède deux parties : une partie théorique avec des notions mathématiques et des applications à l'économie et une partie d'exercices avec solutionnaire.

Le cours d'Introduction aux faits et mécanismes économiques ([7]), quant à lui, s'articule en sept parties :

1. Introduction sur l'échange marchand et l'arbitrage avec utilisation des concepts d'offre et de demande et d'élasticité
2. Marchés parfaits : présentation du modèle de base de l'économie en traitant successivement les décisions des individus en matière de consommation, de travail et d'épargne et celles des entreprises sur que produire et comment produire
3. Marchés imparfaits : Initiation à la concurrence imparfaite, aux externalités, aux problèmes d'information.
4. Micro-économie: marché des facteurs et des fonds (Epargne et investissement, prise en compte du risque, capital physique et financier)
5. Croissance macroéconomique, sources de croissance et de richesse, rôle des facteurs de production, éléments d'offre agrégée
6. Macro-économie, monnaie, inflation, taux de change, éléments de demande agrégée
7. Macro-économie avec des marchés imparfaits, offre agrégée, demande agrégée, chômage, inflation, rôle de l'Etat. Examen des objectifs et instruments macroéconomiques et construction de l'équilibre macroéconomique. Analyse des systèmes économiques et de la relation entre économie et politique.

Concrètement, le cours est composé de quatre points : une introduction, la microéconomie, la macroéconomie et l'économie politique.

Les notes de cours de 2005-2006 ([6]) était construites sous forme d'une suite de slides. Un syllabus a été rédigé par la suite ([7]).

Nous allons nous intéresser aux contenus du cours d'économie ([7]) et de mathématique ([23]) qui sont liés aux notions de dérivée et de limite c'est-à-dire le deuxième et le troisième chapitre du cours de mathématique ainsi qu'une petite partie du quatrième et les quatre premières parties du cours d'économie qui traite essentiellement la microéconomie de base. Nous pointerons, également, les améliorations ou les différences entre les deux versions ([6] et [7]) du cours d'économie. Nous examinerons aussi les slides du cours d'économie de 2009-2010 ([8]).

2.2 Pente

Le terme "pente" (première approche de la dérivée) est très régulièrement employé dans le cours d'économie surtout lors d'interprétation graphique, c'est pourquoi nous allons consacrer une partie de l'analyse à ce terme.

Précisons, pour débuter, que la pente est connue par les étudiants depuis le secondaire. En géométrie cartésienne, la pente d'une droite (ou le coefficient angulaire d'une droite) d'équation $y = ax + b$ correspond au rapport entre la variation de l'ordonnée y et la variation correspondante de l'abscisse x. Notons encore que les étudiants savent aussi que la dérivée peut-être définie de la façon suivante :

> La dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ est égale au coefficient angulaire de la tangente au graphique de $f(x)$ au point P d'abscisse x. ([25])

Examinons séparément, dans un premier temps, le cours d'économie et le cours de mathématique puis, dans un second temps, analysons-les comparativement.

Afin de comprendre la manière dont le terme pente est introduit dans le cours d'économie [7], nous allons décrire les premiers chapitres du cours d'économie qui mettent quelques concepts en place tels que la droite de budget et la frontière des possibilités de production.

Dès le début du cours d'économie [7], un exemple est mis en place pour définir différents concepts. Cet exemple fait intervenir un consommateur qui devrait choisir, pour occuper ses vacances, entre la lecture de livres et des excursions. Assez rapidement, le calcul à la marge va être mis en évidence et est illustré grâce à cet exemple comme le montre la citation suivante.

> La décision [1] n'impliquera pas nécessairement uniquement des livres ou uniquement des excursions. Il s'agira plutôt d'"un peu plus de livres" ou "d'un peu plus d'excursions" donc d'une variation "à la marge".
> ([7])

Ensuite, comme nous allons le voir dans la citation suivante, les définitions de prix d'un bien, de dépense pour une quantité d'un bien et de droite de budget sont avancées pour en arriver à celle de coût d'opportunité. Le terme pente est alors introduit dans la représentation graphique (voir Figure 2.1) de la droite de budget. Nous ne considérerons pas ici la notion d'accessibilité car elle a peu d'intérêts à être explicitée dans le contexte de ce mémoire. Examinons cette première introduction du terme pente dans le cours d'économie [7].

> La contrainte de budget peut-être représentée dans un espace défini par la quantité des deux biens considérés. En abscisse, le

[1] La décision est la répartition optimale du budget ou du temps entre lectures et visites

graphique 2.1 représente la quantité d'excursions $Q_1 = Q_E$. En ordonnée on trouve la quantité de livres $Q_2 = Q_L$.
L'équation de la droite est donnée par l'équation du budget, réécrite pour isoler Q_L :

$$Q_L = (B/P_L) - Q_E \times (P_E/P_L)$$

Cette équation donne la quantité de livres que le consommateur peut s'offrir pour chaque quantité possible d'excursions, et pour la valeur donnée des 3 paramètres : le budget B et les deux prix P_E et P_L. [...]

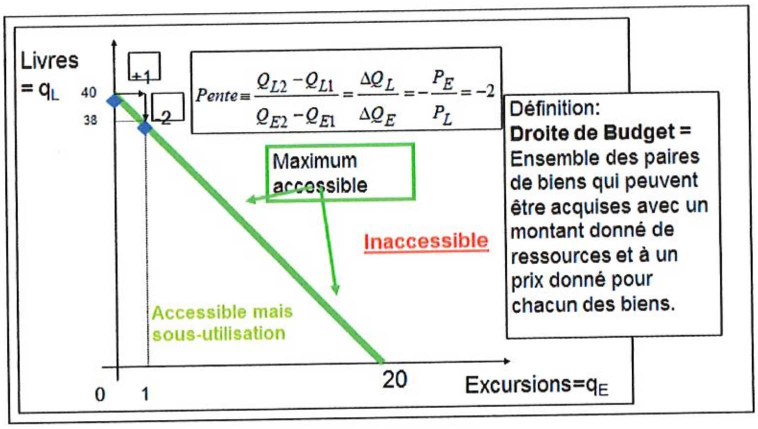


Figure 2.1: Graphique Budget

Cette équation du budget et la pente sont alors détaillées et explicitées en considérant $p_E = 50$ et $P_L = 25$. Regardons ces explications puis nous tenterons une analyse de celles-ci.

Le premier terme est clairement le maximum possible de livres : le budget divisé par le prix d'un livre.

Le deuxième terme est la quantité d'excursions (quantité du bien alternatif) fois le coefficient $(P_E/P_L) = 50/25 = 2$ qui est le nombre de livres auxquels on renonce pour avoir une excursion, donc le *coût d'opportunité* d'une excursion, ou encore le prix d'une excursion en livres. C'est ce que nous avons appelé intuitivement la pente du toboggan, ou la vitesse de transformation des livres en excursions. Mathématiquement, ce coefficient de Q_E (de la variable en abscisse) est bien la pente d'une droite, ou encore la dérivée de l'ordonnée $(Y = Q_L)$ par rapport à l'abscisse $(X = Q_E)$.
Si on note une variation par le symbole "delta" $= \Delta$, et une variation positive par le symbole Δ^+ ou négative par Δ^-, on peut noter la pente ou vitesse de transformation des livres en

excursions comme

$$\text{Pente} \equiv \frac{Q_{L2} - Q_{L1}}{Q_{E2} - Q_{E1}} = \frac{\Delta Q_L}{\Delta Q_E} = -\frac{P_E}{P_L} = -2.$$

En valeur absolue on a

$$|\frac{Q_{L2} - Q_{L1}}{Q_{E2} - Q_{E1}}| = \frac{\Delta^{-} Q_L}{\Delta^{+} Q_E} = \frac{P_E}{P_L} = 2.$$

Observons que les économistes, depuis Marshall en 1961, ont pris l'habitude de construire les graphiques dans le sens contraire des mathématiciens. Pour la représentation graphique de la fonction de demande, la quantité en abscisse a été placée et le prix en ordonnée. Pour un mathématicien qui évoque souvent la loi de demande comme un exemple de fonction employée en économie, la quantité (qui est une fonction du prix) aurait été placée en ordonnée et le prix sur l'axe des abscisses. Mais les mathématiciens s'intéressent, généralement, moins à l'interprétation économique.

Constatons également que la notion de vitesse est associée à la pente ce qui est une très bonne interprétation physique de la pente par le fait que la vitesse est aussi une dérivée (de la position par rapport au temps).

Remarquons que les variations de Q_E utilisées ici pour la définition de la pente sont de différents types : infinitésimales, de plusieurs unités ou même d'une seule unité (comme nous le montrerons par la suite). Comme il s'agit de calculer la pente d'une droite, la dérivée en chaque point de cette droite sera toujours égale à une constante. Donc, tant que l'on considère le rapport de l'ordonnée par l'abscisse, toutes les variations peuvent être utilisées de la même manière.

Enfin, bien qu'il soit question de dérivée, la pente est bien déterminée de manière discrète - la variation est unitaire. Nous le constatons en analysant la définition de la pente dans le livre de référence de Stiglitz et Walsh [22] du cours d'économie. Dans le début de ce livre, nous trouvons une annexe expliquant comment lire un graphique. Un paragraphe entier est dédié à la pente. Nous pouvons y lire ce qui suit concernant celle-ci.

> Dans un graphique, la modification d'une variable située sur l'axe vertical due à la modification d'une unité d'une variable située sur l'axe horizontal s'appelle la *pente*, comme la pente d'une montagne. La pente correspond au rapport entre le déplacement vertical (*rise*) et le déplacement horizontal (*run*). En notant $\Delta^{Vertical}$ le déplacement vertical[2] et $\Delta^{Horizontal}$, la pente d'une droite se calcule en divisant $\Delta^{Vertical}$ par $\Delta^{Horizontal}$

Dans la version de 2005-2006 du cours d'économie [6], ces notations $\Delta^{Vertical}$ et $\Delta^{Horizontal}$ étaient utilisées pour définir la pente mais elles

[2]En mathématiques, on utilise le symbole Δ - la lettre grecque *delta* - pour représenter une variation.[22]

n'étaient pas assez expliquées pour pouvoir les comprendre sans lire le livre de référence de Stiglitz et Walsh.
Quand la courbe considérée est une droite, la pente de la droite est constante et il est dès lors possible de la calculer en divisant $\Delta^{Vertical}$ par $\Delta^{Horizontal}$. Mais si la courbe n'est pas une droite, cette façon de faire n'est plus correcte et l'on devrait alors avoir recours à des variations infinitésimales.

Ce décalage entre la façon de procéder en économie et en mathématique représente évidemment un obstacle potentiel à la compréhension des étudiants.

Dans la suite du cours d'économie [7], est définie la frontière des possibilités de production. Celle-ci n'étant pas une droite, la définition de la "pente" va quelque peu changer.

> Il n'est plus possible d'identifier la dépense en livres par un simple produit de prix et de quantité, car le prix d'un livre en temps n'est pas constant. Il dépend, par hypothèse du nombre de livres déjà lus et d'effet de fatigue des yeux (ou du cerveau) accumulée. [...] Les [...] combinaisons sont données une à une et représentées par la frontière de production sur le graphique [suivant]. ([7])

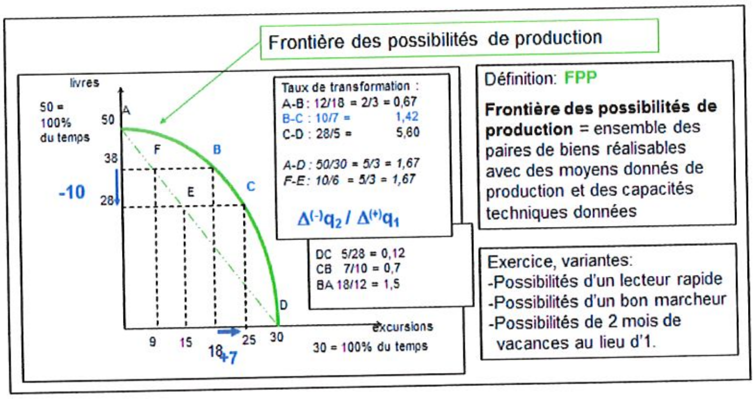


Figure 2.2: Graphique de la frontière des possibilités de production

> [...]
> Contrairement à la frontière de budget qui était une droite [...], la frontière des possibilités de production est une courbe et sa pente dans l'espace des quantités est donc variable et croissante en valeur absolue (de plus en plus négative) :
>
> $$\text{Pente} \equiv \frac{Q_{L2} - Q_{L1}}{Q_{E2} - Q_{E1}} = \frac{\Delta Q_L}{\Delta Q_E} = \text{variable.}$$

Dans les slides du cours d'économie [8], le terme variable est expliqué. On dit que si c'est variable, cela signifie que ce n'est "*pas un taux d'échange constant*". Notons aussi que la pente trouve encore un autre nom dans cette

partie du cours car on la nomme taux de transformation.
Cette nouvelle définition de la pente est bien différente de la précédente. Ici, on calcule la pente de la sécante passant par les deux points considérés. Si ces deux points sont B et C, la pente de la droite passant par ces deux points est égale à $\frac{-10}{7} = -1,42$ qui est directement pris en valeur absolue dans l'exemple bien que ce ne soit pas noté dans cette définition de la pente. Bien qu'il soit question d'une courbe et de sa pente, la pente considérée ici n'est pas la pente de la tangente à la courbe en un point. L'utilisation de la dérivée pour calculer la pente comme cela est fait serait donc à proscrire.

Si nous regardons le graphique (Figure 2.2), nous lisons que le taux de transformation est égal à $\frac{\Delta^{(-)}q_2}{\Delta^{(+)},q_1}$, notation venant du livre de Stiglitz et Walsh [22] qui considère des variations unitaires. Nous constatons que ce ne sont pas les variations utilisées ici. Les deux définitions, $\frac{\Delta Q_L}{\Delta Q_E}$ et $\frac{\Delta^{(-)}q_2}{\Delta^{(+)},q_1}$ peuvent provoquer une certaine confusion chez l'étudiant. Nous pouvons donc dire que la pente, au sens entendu dans le cours d'économie, dépend du point de départ et de la variation envisagée. Nous étudierons encore l'utilisation de la pente dans la section suivante.

Analysons maintenant la façon dont est introduite la pente dans le cours de mathématique [23]. Notons déjà que la pente est explicitement employée dans une section du cours de mathématique [23]. Nous pouvons ainsi trouver dans le chapitre concernant la dérivation de fonctions de plusieurs variables une partie qui a pour sujet la dérivation implicite dans laquelle un paragraphe est dédié à la pente d'une courbe de niveau et à la dérivée d'une fonction d'une variable définie implicitement. Voici ce que nous pouvons y lire.

> Considérons une fonction de deux variables $F(x, y)$ ainsi que l'équation
> $$F(x, y) = c \quad (c \text{ est une constante}).$$
> Cette équation représente une courbe de niveau de la fonction F [...]. Supposons que cette équation définisse y implicitement comme une fonction d'une variable $y = f(x)$ sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ ainsi qu'illustré à la figure 2.3. Cela signifie que
> $$\forall x \in I : F(x, f(x)) = c. \tag{2.2.1}$$
> Si f est dérivable, que vaut $f'(x)$? Si la courbe de niveau est telle que celle de la figure 2.3, le problème revient donc à déterminer la pente de la courbe en chaque point P de coordonnées $(x, f(x))$, c'est-à-dire le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en ce point.

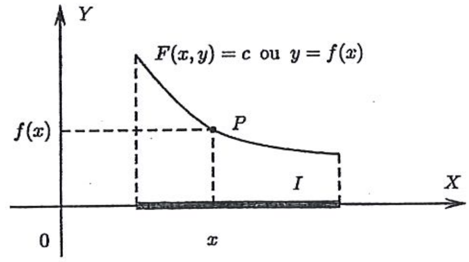


Figure 2.3: Quelle est la pente en P ?

[...]
Proposition (Pente en un point d'une courbe de niveau et dérivée d'une fonction d'une variable définie implicitement
Soit $F(x,y)$ une fonction différentiable.
Si

$$F(x,y) = c \quad \Rightarrow \quad y = f(x) = \textit{fonction dérivable sur une intervalle } I \textit{ de } \mathbb{R}$$

alors la pente de la courbe de niveau définie par $(F(x,y) = c)$ au point $(x, f(x))$ est donnée par

$$y' = f' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \textit{ pour tout}(x,y) \textit{ tel que } F(x,y) = c \textit{ et } F'_y(x,y) \neq 0.$$

La pente est encore utilisée dans d'autres parties du cours de mathématique comme nous le verrons dans l'étude du concept de productivité marginale.

En comparant les diverses définitions de la pente dans les deux cours, nous remarquons un certain décalage entre ceux-ci.
Dans le cours d'économie, nous avons une définition de la pente d'une droite avec des variations discrète puis une définition de la pente d'une sécante passant par deux points de la courbe.
Dans le cours de mathématique, on parle de la pente d'une courbe en un point et en cela on considère des dérivées partielles et donc des variations continues.
Les étudiants pourraient alors considérer que ces "pentes" n'ont rien avoir l'une avec l'autre. Nous remarquons bien ici le décalage entre les deux cours.

2.3 Taux marginal de substitution

Cette section nous permet d'amener une nouvelle notion, le taux marginal de substitution, qui est un concept uniquement étudiée dans le cours d'économie. Nous allons encore y approfondir l'étude de la pente ainsi qu'analyser ce qui est fait dans ce cours du point de vue théorique mais aussi sur un exercice par rapport à cette notion de taux marginal de substitution. Rappelons que celle-ci est a été examinée en début de ce mémoire.

Le concept de taux marginal de substitution arrive assez rapidement après le concept de frontière des possibilités dans le cours d'économie. Un paragraphe est consacré à la "préférence" c'est-à-dire une manière de représenter la satisfaction par rapport à un bien. Les notions de courbes d'indifférence puis de taux marginal de substitution (TMS) y sont posées. Examinons, d'abord, comment est introduite la courbe d'indifférence.

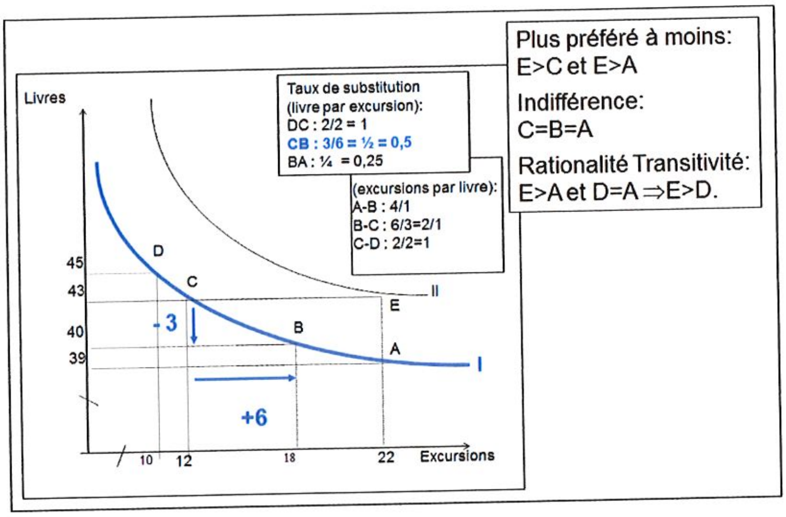


Figure 2.4: Courbes d'indifférences

[Ce graphique (Figure 2.4)] présente une courbe d'indifférence dans l'espace des livres et des excursions. Les ensembles A, B, C et D de biens sont sur la même courbe d'indifférence et donnent donc la même satisfaction au consommateur. [...]
Sur le graphique on a travaillé par larges segments et pas par unités. Ainsi au point D, le consommateur qui a 45 livres et 10 excursions accepte de renoncer à 2 livres pour avoir 2 excursions; en moyenne il est donc indifférent entre 1 livre et 1 excursion. [...]
La pente de la courbe d'indifférence en un point donne les termes d'échange subjectifs du consommateur, une relation entre une paire de biens initiale (1) et une paire de biens indifférente (2):

$$\text{Pente} \equiv \frac{Q_{L2} - Q_{L1}}{Q_{E2} - Q_{E1}} = \frac{\Delta Q_L}{\Delta Q_E} = \begin{array}{l}\text{variable(de plus en plus faible}\\ \text{en valeur absolue)}\end{array}.$$

Notons, avant d'examiner la définition du taux marginal de substitution, que la pente de la courbe d'indifférence est encore une fois considérée comme une variation discrète pourtant nous travaillons ici avec une courbe non droite donc la pente change à chaque point. De plus, nous devons considérer des variations infiniment petites pour calculer la pente de la courbe d'indifférence en un point comme il est noté dans la définition.

L'utilisation des segments pour le calcul de la pente (qui est ici bien précisée) est la preuve que l'on considère ici une approximation de la pente et non la pente de la tangente à la courbe en un point.

Analysons la manière dont le taux marginal de substitution est déterminé dans le cours d'économie [7].

> En observant la courbe d'indifférence du consommateur, nous venons de découvrir le prix que le consommateur est prêt à payer en livres pour chaque excursion supplémentaire. Ce prix est variable : plus le consommateur a déjà fait d'excursions, plus ce prix est bas. Il se calcule donc à la marge et entre bien. C'est ainsi qu'on peut définir un "taux marginal de substitution" :
> **Taux marginal de substitution** d'un bien par un autre à un niveau donné de consommation *se définit comme la* **quantité de bien** qu'un consommateur accepte d'abandonner pour **augmenter d'une unité** la consommation d'un **autre bien** en maintenant le même **niveau de satisfaction**.
> Le taux marginal de substitution se mesure ***en un point***, **à la marge**, et est variable.

Remarquons que, même s'il est mentionné que le taux marginal de substitution est variable, seule sa dépendance au point d'application est considérée et non sa dépendance à la variation choisie. Ce manque de clarté pourrait faire naître chez l'étudiant un certain obstacle quand il se retrouve devant un exercice. Examinons justement un exercice ci-dessous.

Dans le cours d'exercices d'économie [4], un seul exercice concernant le taux de substitution est réalisé en séance. L'énoncé de cet exercice est le suivant.

> Soit une enquête visant à connaître les préférences des consommateurs en matière d'hébergement touristique dans la Province de Namur. Cette enquête se concentrait sur deux types de formules d'hébergement : les auberges de jeunesse et les chambres d'hôtes. Les consommateurs interrogés étaient invités, dans un 1er temps, à classer par ordre de préférence une série d'assortiments prédéfinis et, dans un 2ème temps, pour chacun des assortiments ainsi hiérarchisés, à communiquer à l'interviewer des assortiments alternatifs, équivalents du point de vue de la satisfaction éprouvée. Les informations recueillies ont permis à l'interviewer de tracer des "courbes d'indifférence" pour chaque personne interrogée. Les courbes d'indifférence reflétant les préférences de Mr Dubois figurent ci-dessous.

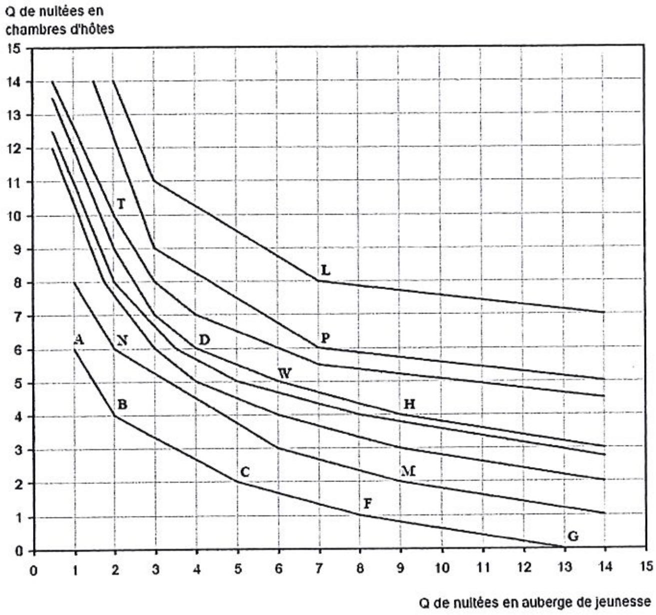


Figure 2.5: Courbes d'indifférence de la quantité de nuitées en chambres d'hôtes par rapport à celles en auberge de jeunesse

> On vous demande de : [...]
> d) Calculer les valeurs des taux de substitution respectivement entre les points A, B, C, F, G.

Constatons déjà que les courbes de ce graphique sont des suites de segments de droite alors que, dans la théorie, nous trouvons des courbes continues.
Regardons la résolution du point d de cet exercice (réalisée lors d'une séance d'exercices par un étudiant en économie) qui présente les quatre valeurs suivantes :

- $TMS(AB) = |\frac{6-4}{1-2}| = |\frac{2}{-1}| = 2$
- $TMS(BC) = |\frac{4-2}{2-5}| = |\frac{2}{-3}| = \frac{2}{3}$
- $TMS(CF) = |\frac{2-1}{5-8}| = |\frac{1}{-3}| = \frac{1}{3}$
- $TMS(FG) = |\frac{1-0}{8-13}| = |\frac{1}{-5}| = \frac{1}{5}$

Le calcul considéré est le calcul de la pente de la sécante passant par les deux points. On calcule bien le taux de substitution qui utilise des variations discrètes et non le taux marginal de substitution qui, selon la définition, fait appel à une variation unitaire du prix.
De plus, comme ce sont des segments, le taux marginal de substitution sera le même entre A et n'importe quel point qui le suit jusqu'à B. Remarquons encore que si les quantités étaient très grandes, les segments seraient très petits et les approximations meilleures.

Cet exercice nous permet donc de souligner le fait que les variations des quantités ne sont pas explicitement imposées et que, par conséquent, l'étudiant pourrait choisir de calculer le taux marginal d'une autre façon.

2.4 Elasticité

Examinons maintenant le concept d'élasticité. Contrairement au taux marginal de substitution, l'élasticité est étudiée aussi bien dans le cours d'économie que dans le cours de mathématique. Procédons en décrivant l'approche théorique adoptée dans les deux cours puis analysons ceux-ci. Ensuite, intéressons-nous sur l'aspect pratique en comparant les exercices proposés dans chacun de ces cours.

2.4.1 Approche théorique

Dans le cours de mathématique [23], la notion d'élasticité est définie de diverses manières. Tout d'abord, l'élasticité-prix de la demande est introduite comme suit

> Si $D(p)$ représente la demande D d'un bien en fonction du prix p de ce bien, on peut bien sûr mesurer la **variation absolue**
>
> $$D(p+\Delta p)-D(p)$$
>
> de la fonction D lorsque le prix passe du montant p au montant $p+\Delta p$. Cependant, cette mesure de la sensibilité de la demande à la variation du prix n'est pas toujours satisfaisante, et on s'intéressera à la **variation relative**
>
> $$\frac{D(p+\Delta p)-D(p)}{D(p)}$$
>
> de la fonction D lorsque le prix passe de p à $p+\Delta p$.
> Cette variation relative est en fait un pourcentage : par exemple, si elle vaut 0.05, cela signifie que $D(p+\Delta p)=D(p)+0.05D(p)$, C'est-à-dire qu'une variation de prix de Δp induit une augmentation de 5% de la demande.
> De la même façon, on peut s'intéresser à la variation relative du prix :
>
> $$\frac{(p+\Delta p)-p}{p}=\frac{\Delta p}{p}.$$
>
> On a la définition suivante :
> Le rapport entre la variation relative de la quantité demandée et la variation relative du prix est appelé **élasticité-prix moyenne de la demande D dans l'intervalle** $[p,p+\Delta p]$ et vaut
>
> $$\alpha=\frac{\frac{D(p+\Delta p)-D(p)}{D(p)}}{\frac{\Delta p}{p}}=\frac{D(p+\Delta p)-D(p)}{\Delta p}\cdot\frac{p}{D(p)}.$$

Notons déjà la présence d'une interprétation économique au sein de l'explication mathématique et du symbole Δ signifiant "une variation de".

Par la suite, une proposition est énoncée pour interpréter cette élasticité-prix moyenne.

> Soient $D(p)$ la fonction décrivant la demande d'un bien en fonction de son prix p, et α l'élasticité-prix moyenne de D sur $[p, p+\Delta p]$, c'est-à-dire
>
> $$\alpha = \frac{\frac{D(p+\Delta p)-D(p)}{D(p)}}{\frac{\Delta p}{p}}$$
>
> Si le prix p augmente de 1%, alors la demande D varie de α%.([23])

Nous retrouvons ici la variation d'un pourcent du prix qui est parfois utilisées par les économistes (comme nous avons pu le constater en analysant les manuels de référence).

Le cours se poursuit avec la définition de l'élasticité de la demande par rapport au prix.

> Si $D(p)$ représentent la demande en fonction du prix p est dérivable, **l'élasticité demande par rapport au prix** est notée $El_pD(p)$ et est définie par :
>
> $$El_pD(p) = D'(p)\frac{p}{D(p)}.$$
>
> Remarque
> **La quantité** $El_pD(p)$ est donc indépendante de Δp et **est une bonne approximation de l'élasticité-prix moyenne** α (lorsque Δp n'est pas trop élevé) [...]

Bien que nous nous trouvions dans un contexte mathématique, la variation de p n'est pas notée comme étant infinitésimale.

Poursuivons la description et à l'analyse du cours d'économie [7].
Dans ce cours, un chapitre est consacré à l'élasticité de l'offre et de la demande. Examinons la manière par laquelle la définition de l'élasticité de la demande au prix est mise en place dans ce cours.

> Une mesure pour calculer la proportionnalité de la réaction est l'"élasticité".
> <u>Définition:</u>
> L'élasticité de la demande au prix en un point (P, Q) est la variation en pourcent (%) de la quantité demandée pour 1% de variation du prix du bien.
> <u>Mesures</u>
> L'élasticité se calcule comme suit:
>
> $$E_P^D \equiv \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} \Longrightarrow E_P^D = \frac{\Delta Q \times P}{\Delta P \times Q}$$

Elle peut aussi se calculer de manière "discrète" :

$$E = \frac{(Q_1 - Q_0)/Q_0}{(P_1 - P_0)/P_0} = \frac{Q_1 - Q_0}{P_1 - P_0} \times \frac{P_0}{Q_0}$$

C'est donc aussi la pente $(Q_1 - Q_0)/(P_1 - P_0)$ (ou son inverse vu la convention d'axes) $\times$ le rapport des coordonnées du point de la courbe pris en compte P_0/Q_0.
Elasticité "moyenne", observée entre 2 points :

$$E_M = \frac{(Q_1 - Q_0)/(Q_0 + Q_1)}{(P_1 - P_0)/(P_0 + P_1)}$$

Elasticité infinitésimale calculée en un point (p, q) :

$$E_P^D = \frac{\partial q}{\partial p} \times \frac{p}{q}$$

La demande est généralement une fonction décroissante du prix, l'élasticité est donc négative. Si c'est l'ampleur de la réaction qu'on veut analyser plutôt que son signe, on prendra l'élasticité de la demande au prix en valeur absolue.

Observons que les points qui étaient notés P et Q deviennent p et q lorsque les variations sont infinitésimales comme pour dire que l'on considère des variations plus petites. De manière générale, nous notons dans les deux cours diverses notations pour exprimer l'élasticité.

Dans la suite du cours d'économie, nous trouvons aussi une illustration graphique du concept d'élasticité (voir Figure 2.6). A partir de ce graphique de la fonction de demande, les concepts de dépense, consommation et profit sont avancés.

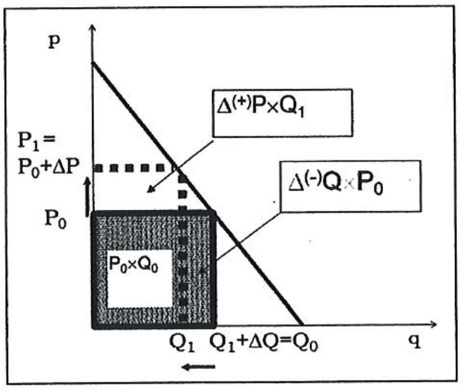


Figure 2.6: Elasticité et Dépense totale

Comparons la manière dont est abordée l'élasticité de la demande dans les deux cours d'économie et de mathématique. Remarquons, tout d'abord, que les notations sont distinctes dans le cours de mathématique et dans le cours d'économie. Pour désigner la quantité, nous avons d'un côté, en économie, la lettre Q et de l'autre la fonction $D(p)$. Dans le cours de mathématique, $D(p)$ n'est jamais considéré comme une quantité. On parle seulement de fonction de demande. De plus, cette différence de notation est encore accentuée dans la définition de l'élasticité continue donnée dans chacun des deux cours. Nous avons d'une part, celle du cours de mathématique :

$$El_pD(p) = D'(p)\frac{p}{D(p)}$$

et d'autre part, celle du cours d'économie :

$$E_P^D = \frac{\partial q}{\partial p} \times \frac{p}{q}. \tag{2.4.1}$$

Nous constatons l'utilisation de P et p dans la définition du cours d'économie. La dénomination de l'élasticité infinitésimale est E_P^D mais la définition prend p comme variable de prix et ne considère pas le D comme cela est fait dans la définition mathématique. Celui-ci sert seulement à montrer que l'élasticité est une élasticité de la demande. Ces deux définitions de l'élasticité semblent différentes alors que ce sont les mêmes cela peut donc entraîner une "séparation mentale" pour l'étudiant qui considèrerait qu'il existe une élasticité mathématique et une élasticité économique.

Notons, également, que cette dernière définition (2.4.1) est très peu utilisée dans le cours d'économie. De manière générale, la définition suivante :

$$E_P^D = \frac{\Delta Q \times P}{\Delta P \times Q}$$

sera préférée. Nous le constatons en regardant une des questions de l'examen de juin 2010 en économie (série A) qui demande de définir en français et algébriquement le concept d'élasticité. Le solutionnaire fait par un assistant du cours propose la réponse suivante :

> L'élasticité de la demande au prix en un point (P, Q) est la variation en pourcentage de la quantité demandée pour 1% de variation du prix du bien.
>
> $$E = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}$$

Bien que la théorie propose diverses définitions de l'élasticité, celle qui est choisie est la définition discrète. Elle sera donc également privilégiée lors des exercices comme nous le constaterons ultérieurement.

Le symbole delta, Δ, qui se trouve dans le cours d'économie peut aussi poser problème car il n'a pas la même signification dans les deux cours.
Dans le cours de mathématique, par exemple, Δp est, en premier lieu, interprété comme une variation du prix sans autre précision (mais souvent implicitement regardé comme une petite variation en mathématique). En

second lieu, il est considéré comme une variation infinitésimale du prix car, d'un point de vue mathématique, pour passer de $\frac{D(p+\Delta p)-D(p)}{\Delta p}$ à $D'(p)$ il faut que Δp tende vers zéro.
Dans le cours d'économie, cette même écriture signifie une variation finie de la quantité ou une variation unitaire par rapport au prix (sauf peut-être de manière non explicite dans l'exercice 2 qui suit ces définitions de l'élasticité et que nous analyserons par après).

Comme nous pouvons aussi le remarquer l'interprétation prépondérante dans les deux cours fait appel à une variation en pourcentage et tous deux considèrent une variation d'un pourcent du prix quand on calcule l'élasticité de façon discrète. Bien que, dans le cours de mathématique, cette précision d'une variation d'un pourcent soit toujours notée; dans le cours d'économie, nous ne la trouvons pas à chaque fois. Dans la définition discrète de l'élasticité de demande du cours d'économie

$$E = \frac{(Q_1 - Q_0)/Q_0}{(P_1 - P_0)/P_0}, \tag{2.4.2}$$

il manque le fait que $\frac{P_1-P_0}{P_0}$ doit être égal à 1% qui se trouve être dans la définition littérale donnée au départ. Ce manque de cohérence avait déjà été soulevé dans l'analyse des manuels de référence.
Intéressons-nous à la définition d'élasticité discrète du livre de référence du cours d'économie afin de savoir si la définition donnée de l'élasticité (2.4.2) n'a pas été tronquée lors de la transposition didactique. Dans le livre de Stiglitz et Walsh [22], l'élasticité-prix de la demande est déterminée de la manière suivante.

> L'élasticité-prix de la demande se définit comme la variation en pourcentage de la quantité demandée divisée par la variation en pourcentage du prix. En terme mathématiques :
>
> $$\text{élasticité de la demande} = \frac{\begin{pmatrix}\text{variation en pourcentage}\\ \text{de la quantité demandée}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{variation en pourcentage}\\ \text{du prix}\end{pmatrix}}$$
>
> Si la quantité demandée varie de 8% en réaction à une variation de 2% du prix, l'élasticité de la demande est égale à 4.

Nous constatons que, dès la première apparition de l'élasticité dans le livre de Stiglitz et Walsh, la variation du prix n'est pas considérée comme une variation d'un pourcent.
Bien que dans la suite du livre de Stiglitz et Walsh [22], la variation du prix soit toujours considérée comme une variation d'un pourcent du prix, la définition quant à elle ne considère pas ce pourcentage de variation. Le passage qui est fait vers une élasticité infinitésimale est alors compliqué à percevoir. En effet, nous pourrions par exemple utiliser une variation finie en faisant varier le prix de 100% du prix de départ puis nous considérerions que la variation est extrêmement petite. Cela n'est pas possible (sauf bien entendu

quand la fonction de demande est une droite).
En mathématique, les fonctions considérées ne sont pas des droites donc la variation d'un pourcent est très importante. L'élasticité partielle est même étudiée en prenant comme fonction de demande une fonction à plusieurs variables ce qui est bien différent de ce qui est fait dans le cours d'économie.

Pour ce qui est de la représentation graphique (Figure 2.6), constatons que le fait que les graphiques en économie soient faits dans le sens contraire de ceux de mathématique peut-être assez perturbant pour les étudiants. La quantité étant considérée comme une fonction du prix l'axe des abscisses devrait être en mathématique celui du prix et l'axe des ordonnées celui de la quantité. Remarquons également qu'il est noté $Q_1 + \Delta Q = Q_0$, ce qui laisse apparaître une démarche contraire à celle effectuée car on soustrait une certaine quantité à Q_0 pour trouver Q_1. Pour le prix, cela est plus logique car on passe bien de P_0 à P_1 en additionnant ΔP.

Dans la suite du cours d'économie, une analyse de la pente de la courbe et des différentes positions de la courbe de demande est effectuée. Un exercice utilisant la mesure infinitésimale de l'élasticité est aussi exposé. Celui-ci est décrit ci-après.

> Exercice 2 : Calculez l'élasticité générale au prix de la droite de la demande $Q = a - bP$, montrez qu'elle est variable et inclut la valeur 1 (réaction proportionnelle).
> Solution : Utilisation de la mesure infinitésimale de l'élasticité :
>
> $$E_P^D = \frac{\partial q}{\partial p} \times \frac{p}{q}$$
>
> avec $\frac{\partial Q}{\partial P} \cong \frac{\Delta Q}{\Delta P} = -b$
> donc $E_P^D = -b \times \frac{P}{Q}$.
> La pente d'une droite est une constante (ici $-b$), elle entre dans la formule d'élasticité et le rapport des coordonnées (P/Q) reste propre à chaque point, allant de l'infini à 0 quand Q augmente, donc en passant par 1.
> Plus précisément, comme $P = (a - Q)/b$, $E = (a - Q)/Q$, et donc $E = 1$ si $Q = a - Q$, donc si $Q = a/2$. En outre $E = 0$ si $Q = a$ (et $P = 0$) et $E \to \infty$ si $Q = 0$ et $P = a/b$.

Cet exercice est annoncé comme "pour les matheux" dans le cours d'économie ([8]) et est laissé à la discrétion de chacun dans la version précédente du cours d'économie ([6]).

Analysons cet exercice. Remarquons, encore une fois, que la fonction de demande est affine ce qui implique que la pente de cette fonction est toujours constante. Les économistes illustrent souvent les concepts qu'ils abordent à l'aide de demande affine. Mais ils contribuent ainsi à création d'une conception fausse qui voudrait que l'élasticité soit indépendante de la variation de prix.

Ensuite, si nous examinons les termes suivant

$$\frac{\partial Q}{\partial P} \cong \frac{\Delta Q}{\Delta P} = -b,$$

nous constatons une certaine incohérence. En effet, pour trouver $-b$, il faut d'abord calculer la dérivée $\frac{\partial Q}{\partial P}$ que l'on peut considérer comme une approximation de $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$. Cette dernière assertion n'est pas non plus tout à fait évidente. Nous trouvons, dans le cours de mathématique, quelques lignes pour l'expliquer.

Présentons ci-après un exemple du cours de mathématique qui illustre la différence entre la définition discrète et continue de l'élasticité-prix de la demande, entre une variation infiniment petite et une variation d'un pourcent du prix.

> Supposons que la quantité demandée d'une certaine matière première soit donnée par
>
> $$D(p) = 8000p^{-1.5}.$$
>
> - Calculons l'élasticité de $D(p)$ par rapport à p :
>
> $$\begin{aligned} El_p D(p) &= D'(p)\frac{p}{D(p)} \\ &= 8000(-1.5)p^{-2.5}\frac{p}{8000p^{-1.5}} \\ &= -1.5. \end{aligned}$$
>
> - Calculons la variation exacte de la demande lorsque le prix p augmente de 1% à partir de $p = 4$:
>
> $$D(4) = 8000(4^{-1.5}) = 1000.$$
>
> Si le prix $p = 4$ augmente de 1%, le nouveau prix est égal à $p + \Delta p = 4 + \frac{4}{100} = 4.04$ et la variation de la demande est :
>
> $$D(4.04) - D(4) = 8000 \cdot (4.04)^{-1.5} - 1000 = -14,815.$$
>
> Exprimons cette variation exacte en pourcentage de $D(4)$. On obtient :
>
> $$\frac{-14.815}{1000}100 = -1.4815\%.$$
>
> Conclusion : si le prix augmente de 1% à partir de $p = 4$, la demande diminue de -1.4815%. Cette valeur est relativement proche de la valeur -1.5 obtenue pour l'élasticité.

Notons que la demande considérée ici n'est pas affine contrairement à ce qui est fait dans le cours d'économie ce qui met mieux en évidence la différence entre une variation infinitésimale et une variation d'un pourcent.

2.4.2 Aspect pratique

Intéressons-nous maintenant à la différence des exercices de chacun des deux cours.

Les exercices d'économie et de mathématique concernant le concept d'élasticité sont assez différents. En premier lieu, regardons un exercice type d'économie (venant du syllabus d'exercices [4]).

> Construisez une droite de demande passant par le point A ($P = 100$, $Q = 40$) et dont l'élasticité en ce point vaut -1. Si au départ du point A le prix se réduit de 10%, comment vont évoluer la quantité demandée et la recette totale? [...]

Cet exercice est résolu plutôt rapidement dans les notes de cours. Selon le solutionnaire, comme par hypothèse nous savons que l'élasticité en A (notée ϵ_A) vaut -1 et que, par définition de l'élasticité, nous pouvons noter

$$\epsilon_A = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q},$$

nous avons

$$\frac{\Delta P}{\Delta Q} = -1 \cdot \frac{P}{Q} = -1 \cdot \frac{100}{40} = -\frac{10}{4} = -2,5.$$

La quantité demandée passe donc de 40 à 44 car, pour une variation de 10 unités de prix, nous avons une variation de 4 unités de quantité. ($\frac{\Delta P}{\Delta Q}$ est la pente de la droite au point A.)
Comme la recette au point A est égale au produit de la quantité par le prix, nous obtenons une nouvelle recette totale qui vaut 3960.

Nous notons que, dans cet exercice, la notation correspondant à l'élasticité est ϵ_A ce qui est tout à fait différent de E_P^D utilisé dans le cours théorique. Nous constatons bien l'utilisation de l'élasticité sous forme discrète.

En second lieu, examinons un exercice de mathématique ayant recours à l'élasticité.

> Déterminez les élasticités partielles[3] de z par rapport à x et y dans [le cas suivant] : $z = x^2y^2$. [...]

[3] Les dérivées partielles sont utilisées dans le cours de mathématique pour définir les élasticités partielles d'une fonction à plusieurs variables, donnée comme suit.

> Considérons la fonction $z = f(x, y)$ définie sur $D \subseteq \mathbb{R}^2$ telle que
>
> - $\forall (x, y) \in D : z = f(x, y) \neq 0$
> - f est dérivable sur D
>
> L'élasticité partielle de z (ou de f) par rapport à x et à y est donnée respectivement par
> $El_x z = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$ = élasticité de z par rapport à x lorsque y est maintenu constant
> ;
> $El_y z = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$ = élasticité de z par rapport à y lorsque x est maintenu constant.

([23])

La solution se fait en deux phases. Premièrement, nous sommes invités à calculer les dérivées partielles premières (selon le corrigé fait par les assistants du cours). Nous obtenons ce qui suit :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y.$$

Deuxièmement, nous utilisons celles-ci pour calculer les élasticités partielles :

$$El_x z = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2y^2}2xy^2 = 2$$

et

$$El_y z = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2y^2}2x^2y = 2.$$

Nous constatons que les distinctions entre les différentes élasticités définies dans le cours de mathématique disparaissent dans les exercices pour ne plus considérer que les seules élasticités partielles. Nous remarquons aussi que les deux approches du concept d'élasticité dans les deux cours sont très différentes. Dans le cours d'économie, l'élasticité est vue de manière discrète tandis qu'elle est utilisée de façon continue dans le cours de mathématique. Là, la fonction de demande est une fonction à deux variables ce qui est bien différent de la droite souvent usitée en économie. Ce décalage entre les deux cours peut entrainer chez l'étudiant une dissociation de ceux-ci car les exercices du cours de mathématique sont très éloignés de ceux d'économie et qu'on n'y retrouve peu d'interprétation économique.

2.5 Productivité marginale

Examinons, dans cette section, l'approche adoptée dans les deux cours pour étudier la productivité marginale. Puis analysons-les comparativement. Ensuite, nous nous intéresserons à l'analyse des exercices.

2.5.1 Approche théorique

Dans le cours de mathématique [23], la productivité marginale est citée comme un exemple des dérivées partielles. Avant de définir cette notion pour une et puis plusieurs variables, un paragraphe sur le taux instantané de variation (d'une fonction d'une variable) est avancé. Voici ce que nous pouvons y lire.

> Considérons une fonction $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une seule variable réelle et $x_0 \in D$. On sait [...] que
>
> $$\begin{array}{c}\textbf{le taux instantané de} \\ \text{variation de } f \textbf{ en } x_0\end{array} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$
>
> Ce nombre $f'(x_0)$ représente la pente (ou coefficient angulaire) de la droite d tangente à la droite d'équation $y = f(x)$ au point

de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.
L'équation de d est

$$d \equiv y = g(x) \qquad \text{où} \quad g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Supposons que x augmente de une unité à partir de x_0 et analysons la variation correspondante de $f(x)$ [figure 2.7]

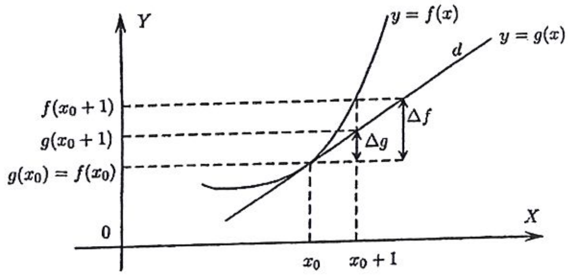


Figure 2.7: La variable x augmente de une unité

x passe de la valeur x_0 à la valeur $x_0 + 1$, $f(x)$ varie de

$$\Delta f = f(x_0 + 1) - f(x_0).$$

Voyons maintenant comment varie la fonction $g(x)$ qui décrit la tangente d. Si x passe de x_0 à $x_0 + 1$, $g(x)$ varie de

$$\begin{aligned}\Delta g &= g(x_0 + 1) - g(x_0) \\ &= [f(x_0) + f'(x_0)(x_0 + 1 - x_0)] - [f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0)] \\ &= f'(x_0)\end{aligned}$$

Dans beaucoup de cas, Δf et Δg (Figure 2.7) seront très proches l'un de l'autre de sorte que $f(x_0 + 1) - f(x_0)$ sera approximé par $f'(x_0)$, ce que nous écrirons comme suit :

$$f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0).$$

La productivité marginale pour une fonction d'une seule variable est alors définie comme suit

Soit $Q(x)$ une fonction de production où x représente une quantité de travail.
La productivité marginale du travail vaut

$$Q'(x) \approx Q(x + 1) - Q(x).$$

La productivité marginale du travail est donc le taux instantané de variation de Q et est approximativement égale à la production additionnelle engendrée par une augmentation de une unité de la quantité de travail. ([23])

Les productivités marginales pour une fonction de trois variables sont quant-à-elles définies de la manière suivante.

> Soit $Q(K, L, T)$ une fonction de production où K représente le capital investi, L la quantité de travail et T la superficie des terres cultivées.
> **La productivité marginale**
>
> - **du capital** $\frac{\partial Q}{\partial K} \approx Q(K+1, L, T) - Q(K, L, T)$; elle est approximativement égale à la production additionnelle engendrée par une **augmentation de une unité du capital,** lorsque les deux autres variables L et T sont maintenues fixes.
> - **du travail** $\frac{\partial Q}{\partial L} \approx Q(K, L+1, T) - Q(K, L, T)$; elle est approximativement égale à la production additionnelle engendrée par une **augmentation de une unité du travail,** lorsque les deux autres variables K et T sont maintenues fixes.
> - **de la superficie des terres cultivées** $\frac{\partial Q}{\partial T} \approx Q(K, L, T+1) - Q(K, L, T)$; elle est approximativement égale à la production additionnelle engendrée par une **augmentation de une unité de la superficie des terres cultivées,** lorsque les deux autres variables L et K sont maintenues fixes.

Notons, en première analyse, qu'alors que pour l'élasticité, on était parti d'une approche discrète pour arriver à l'approche continue (dans le cours de mathématique), on a ici défini la production marginale comme une approximation de la fonction de production pour une variation unitaire d'un de ses facteurs. L'explication donnée du passage de la variation unitaire à une variation infinitésimale est ici fait avec beaucoup de rigueur et de précision.

Dans le cours d'économie [7], la notion de production est, en premier lieu, avancée en prenant pour hypothèse une fonction de production linéaire à un facteur.
La fonction de production est tout de même définie de manière générale.

> Une fonction de production est une relation qui associe à une certaine quantité de facteurs de production (travail, capital physique, capital financier, ...) une quantité produite q.
> $Q = f(L, K, \ldots)$

Ensuite, les définitions de la productivité moyenne et marginale sont énoncées.

> La **productivité moyenne** du travail a est définie comme étant la quantité produite Q divisée par la quantité de travail L fournie : $a = Q/L$ [...]
> Dans notre cas d'une fonction de production linéaire, nous pouvons rajouter que le **produit marginal** est égal à a

En second lieu, nous trouvons les définitions suivantes pour une fonction de production non linéaire à un facteur.

- Produit total : Q
  Production résultant d'une quantité donnée d'inputs et de facteurs L
- Produit moyen : QM
  Produit par unité d'input ou d'un facteur L (TACEPA[4]) : $QM = Q/L$
- Produit marginal : Qm
  Variation de la production induite par l'addition d'une unité d'un input ou d'un facteur L (TACEPA) : $Qm = \Delta Q/\Delta L$ (ou pour une fonction discrète : $Q(L+1) - Q(L)$)

Notons que la fonction de production est nommée de la même façon dans les deux cours, par la lettre Q. Mais cette lettre servait déjà à nommer la quantité dans le cours d'économie. Cette double utilisation vient certainement du fait que la production est le pendant de la quantité dans la théorie du producteur mais elle pourrait être un facteur d'erreur pour les étudiants.

Observons que la première définition du produit marginal n'est pas expliquée, on note seulement que, comme on considère une fonction de production linéaire, il est égal à la productivité moyenne.

La seconde définition du produit marginal du cours d'économie est assez confuse. D'abord, la définition littérale que l'on retrouve dans de nombreux manuels est traduite "mathématiquement" par $Qm = \Delta Q/\Delta L$. Nous pouvons donc nous attendre à ce que ΔL corresponde à une variation unitaire du facteur L pourtant une précision est ajoutée. Selon elle, si l'on a recours à une "fonction discrète" alors le produit marginal est égal à $Q(L+1) - Q(L)$. Nous nous demandons alors quelles sont les variations utilisées pour la première partie de la définition.

Revenons encore sur les termes "fonction discrète". La fonction considérée ici est $Q(\cdot)$, la fonction de production qui est bien une fonction continue mais prise en des valeurs unitaires. Donc, les deux définitions du produit marginal sont équivalentes. Cette confusion de termes mathématiques dans un texte économique peut bien entendu être un obstacle à la compréhension des étudiants.

Remarquons aussi que la définition de fonction de production est assez rapidement utilisée comme une fonction à trois variables dans le cours de mathématique tandis qu'elle va d'abord être prise comme une fonction linéaire à un facteur puis comme une fonction non linéaire à un facteur dans le cours d'économie. La fonction de production ne sera jamais utilisée comme une fonction à plusieurs facteurs dans la partie de microéconomie du cours

[4]Toutes autres choses égales par ailleurs c'est-à-dire que les éléments extérieurs ne sont pas considérés

d'économie. En mathématique, la fonction de production et l'élasticité sont utilisées pour illustrer les dérivées partielles avec une notion économique alors que, dans le cours d'économie, elles sont au mieux vues comme des dérivées de fonction à un seul facteur.

Notons que nous trouvons une définition du produit marginal continu dans le cours d'économie. Celui-ci est introduit en même temps que le coût marginal c'est pourquoi nous y reviendrons dans la section dévolue à cette notion.

2.5.2 Aspect pratique

Analysons maintenant les exercices proposés dans les deux cours d'économie et de mathématique.

Constatons, pour débuter, qu'un bon nombre d'exemples (comme dans l'illustration de la productivité marginale ou de l'élasticité) ou d'exercices pris dans le cours de mathématique [23] font référence à la fonction de production de Cobb-Douglas. Cette fonction est définie de la manière suivante.

> La fonction [...] utilisée pour modéliser la production est de la forme
> $$Q(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$
> où
>
> - Q est la production totale (la valeur monétaire de tous les biens produits en un an);
> - L est la quantité de travail (nombre total d'heures dévolues au travail en une année);
> - K est le montant du capital investi (la valeur monétaire des équipements, bâtiments, machines, ...)
>
> ([23])

Cette fonction, bien que souvent employée dans la sphère économique, n'est pas définie dans la partie théorique du cours d'économie. De plus, comme nous pouvons le remarquer, cette fonction fait intervenir trois variables : Q, L et K comme la productivité marginale du cours de mathématique.

Dans le cours de mathématique ([23]), la productivité marginale permet d'exercer les fonctions de plusieurs variables. La fonction de production de Cobb-Douglas y est employée. Examinons l'énoncé d'un de ces exercices.

> Vérifier que la fonction de production de Cobb-Douglas
> $$Q(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$
> [...] fournit une production qui est doublée lorsque à la fois la quantité de travail et le capital sont doublés. [...]

Nous remarquons que la fonction de production est prise ici comme une fonction à plusieurs variables alors que dans le cours d'économie cette fonction est toujours considérée comme une fonction à une variable (le travail).

Un autre exercice du cours de mathématique concernant toujours la productivité marginale est le suivant.

(a) Calculez les productivités marginales $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ si la fonction de production est

$$Q = 6x^2 + 3xy + 2y^2.$$

(b) De combien s'accroît à peu près la production si x passe de 5 à 6 et y de 4 à 5?
Comparez la valeur obtenue à partir de la différentielle avec la valeur exacte.

La résolution donnée par les assistants des séances d'exercices est la suivante.

(a)
$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12x + 3y$
$\frac{\partial Q}{\partial y} = 3x + 4y$

(b)

$$\begin{aligned}
dQ &= Q'_x(5,4)dx + Q'_y(5,4)dy \\
&= 72 \cdot 1 + 31 \cdot 1 \\
&= 103 \\
\Delta Q &= Q(6,5) - Q(5,4) \\
&= (6 \cdot 36 + 3 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 25) - (6 \cdot 25 + 3 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 16) \\
&= 356 - 242 \\
&= 114
\end{aligned}$$

Nous observons que la valeur obtenue à partir de la différentielle diffère de 11 soit $9,6\%$ de la valeur exacte.

Nous constatons que la fonction de production est encore une fois une fonction continue mais que l'exercice fait aussi bien intervenir la dérivée avec des variations infinitésimales que l'approche discrète avec une variation unitaire. Cela peut permettre aux étudiants de mieux appréhender ces différents types de variations.

Comparons ci-après ces exercices à un exercice d'économie sur la productivité marginale.

Contrairement aux autres chapitres d'exercices [4] du cours d'économie, celui concernant la productivité et les coûts de production fait intervenir l'approche discrète sur certains exercices et l'approche continue sur certains autres.

Un des exercices de type discret est le suivant.

Pierre et Paul, qui sont propriétaires d'un salon de coiffure, doivent décider du nombre de coiffeurs à engager. Leur fonction de production est la suivante :

Nombre de coiffeurs	Coupes de cheveux par jour	Produit marginal	Produit moyen
0	0		
1	12		
2	36		
3	60		
4	72		
5	80		
6	84		

1. Calculez le produit marginal de chaque coiffeur supplémentaire ainsi que le produit moyen et remplissez les deux dernières colonnes du tableau.
2. [...]

La solution de ce premier point de l'exercice est le tableau suivant :

Nombre de coiffeurs	Coupes de cheveux par jour	Produit marginal	Produit moyen
0	0	0	0
1	12	12	12
2	36	24	12
3	60	24	20
4	72	12	18
5	80	8	16
6	84	4	14

Nous constatons que nous devons, ici, utiliser la définition du produit marginal qui fait intervenir une variation unitaire. La fonction de production est représentée par un tableau et non par une équation comme c'était le cas dans le cours de mathématique.

Un autre genre d'exercices, dans le cours d'économie, est celui qui fait intervenir la dérivée. Nous n'avons plus un bien A qui progresse de manière unitaire mais à la place nous pouvons trouver une fonction continue qui définit la production. Examinons un exercice de ce type. Voici ce qui est demandé aux étudiants :

> Imaginons un monde limité à deux pays, l'Allemagne et la France, pouvant produire chacun deux biens, des médicaments M et des téléviseurs T à rendements constants avec le seul facteur de travail [...].
> Les fonctions de production sont donc du type $Q_j^i = a_j^i L^i$, où le suscrit $i = A$ ou F représente les pays et l'indice $j = M$ ou T représente le bien produit.
> Le tableau suivant donne les coefficients a_j^i:
>
> 1. [...]

	Allemagne	France
Médicaments	10	12
Téléviseurs	4	8

2. Dessinez la fonction de production des téléviseurs en France (production totale) dans l'espace approprié ainsi que le produit moyen et le produit marginal par travailleur pour les téléviseurs en France.

[...]

La résolution de cet exercice dans les notes de cours débute par un petit travail théorique à partir de la fonction de production $Q_j^i = a_j^i L^i$ qui est fonction de la quantité de travail. Nous pouvons lire ce qui suit.

$$PM^5 = \frac{Q(L)}{L} = \frac{aL}{L} = a$$
$$Pm^6 = Q'(L) = a$$

Remarquons que la fonction de production est une forme particulière de la fonction de Cobb-Douglas car on considère que le capital est constant. Notons aussi que les concepts liés à la productivité sont à peine vu de manière continue dans le cours théorique et qu'il est par conséquent logique de trouver un point théorique en avant de cette résolution. Comme la théorie ne couvre pas entièrement les notions vues en exercice, cela peut créer des difficultés les étudiants qui voudraient résoudre les exercices en avant des séances de cours comme cela est fortement conseillé en début du syllabus. Cela pourrait même en décourager certains.

La résolution, en tant que telle de l'exercice, commence par un remplacement dans la fonction de production des termes adéquats :

$$Q_T^F = 8 \cdot L^F$$

d'où sont trouvées les productivités moyenne et marginale de téléviseurs en France :

$$PM^F = Pm^F = 8.$$

Si nous comparons l'exercice de mathématique et celui d'économie de type continu, nous constatons que tout deux utilisent la dérivée même si en mathématique ce sont des dérivées partielles. Pour l'exercice d'économie, cet emploi de la dérivée est minime car il intervient seulement dans le point théorique. Par la suite, comme la fonction de production est linéaire, on sait que le produit marginal est égal au produit moyen. Nous notons tout de même qu'une fonction de production affine est un cas très particulier en

[5] Productivité Moyenne
[6] Productivité marginale

économie mais qui est presque toujours celui utilisé dans le livre d'exercices d'économie. Le décalage que nous constatons entre les différents cours peut amener à une certaine confusion chez l'étudiant qui considèreraient des définitions propres aux fonctions affines de façon générale.

2.6 Coût marginal

Les coûts sont étudiés de manière théorique dans le seul cours d'économie [7]. Mais des exercices liés à cette notion se trouvent dans les deux cours de mathématique et d'économie.

Analysons la façon dont les différents coûts sont introduits dans le cours d'économie. Puis nous examinerons différents exercices des deux cours.

2.6.1 Approche théorique

Les premières définitions de coût moyen et coût marginal dans le cas d'une fonction de production linéaire sont introduites de la manière suivante.

> Le **coût unitaire (ou coût moyen)** est [...] égal aux ressources qui sont consommées pour produire une unité. Puisque notre fonction de production ne comprend que la ressource travail, le coût unitaire est égal à $L/Q = 1/a = b$ [...]
> (a étant le produit moyen pour une fonction linéaire de la production)
> b [...] est donc égal au **prix en travail** que coûte une unité de Q.
> Le **coût marginal** est lui aussi par hypothèse (puisque fonction de production linéaire) égal au coût moyen.

Par la suite, les coûts sont définis par nature (c'est-à-dire de manière littérale) ainsi que par la relation avec la production. Nous nous intéresserons à la seconde façon de définir le coût.

Coût définis par la relation avec la production :

- Coût total (CT) : coût observé pour l'ensemble de la production, divisible en coût total fixe (CTF) et coût total variable (CTV) : $CT = CTF + CTV$
- Coût moyen (CM) : coût par unité produite (CT/Q), divisible en coût fixe moyen (CFM) et en coût variable moyen (CVM) : $CM = CFM + CVM = CTF/Q + CTV/Q$
- Coût marginal (Cm) :
  - Définition : Variation du coût total induite par la production d'une unité supplémentaire : $\frac{\Delta CT}{\Delta Q}$.
  - Par définition, le coût marginal ne comprend pas de coût

fixe.

Ces notions de coûts ainsi que celles de productivité sont, ensuite, vues graphiquement (voir ci-après la figure 2.8).

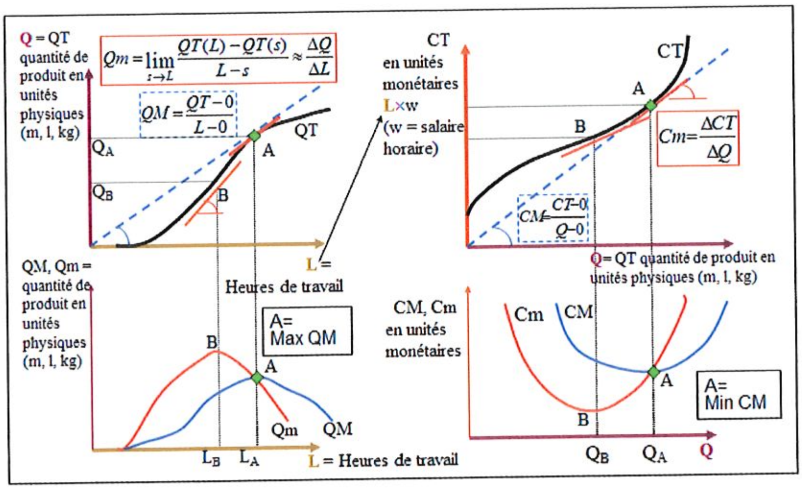


Figure 2.8: Rendements et coûts

Nous remarquons sur ces différents graphiques l'apparition d'une définition continue de la productivité marginale avec l'utilisation de la limite. La productivité marginale est considérée comme une dérivée qui est une approximation du rapport entre la variation de la productivité totale et la variation de la quantité d'heures de travail. La notion de productivité marginale est également associée à la pente de la tangente à la courbe de productivité totale (QT) au point A.
Le coût marginal quant à lui est toujours défini de la manière suivante :

$$Cm = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} \tag{2.6.1}$$

mais il peut aussi être interprété comme la pente de la tangente à la courbe de coût total (CT) au point A et, par cela, il peut être considéré comme une dérivée mais cela n'est pas noté explicitement. Observons encore que cette dernière définition (2.6.1) ne donne pas d'informations quand au point considéré par sa définition ni sur la variation utilisée.
Notons que nous ne trouvons pas d'autres explications sur ces concepts vus de manière continue ailleurs que sur ce seul graphique.

A la suite de ces graphiques, un exemple sous forme d'exercice est expliqué. Il s'agit d'un exercice où il est demandé de calculer la productivité marginale et les divers coûts. Cet exercice utilise des données (nombres de travailleurs) qui progresse d'une unité par une unité. Nous allons l'analyser afin de soulever certains points problématiques.

Dans les slides du cours d'économie de cette année (2009-2010), au chapitre sur les coûts de l'entreprise, nous trouvons l'exercice ce qui suit.

> **Coût marginal :** $Cm(Q)$
> Définition : Variation du coût total induite par la production d'une unité supplémentaire : $Cm = \Delta CT/\Delta Q$.
> Forme discrète : $Cm(Q) = CT(Q+1) - CT(Q)$.
> [...]
> **Décomposition et analyse des coûts: Exemple numérique**
> Calcul (approximation) du coût marginal :
> $Cm = \Delta CT/\Delta Q$, Approximation : $Cm(Q+1) \approx CT(Q+1) - CT(Q)$.
>
> $Cm(300) = CT(300) - CT(100) = 245 - 110 = 135$ pour $200 = 135/200 = 0,675$

Computer Services SA							
Nombre de Personnes	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de PC	**0**	**100**	**300**	**600**	**700**	**770**	**800**
QM = Rendement moyen		100	150	200	175	154	133,3
Qm = Rendement marginal		*100*	*200*	*300*	*100*	*70*	*30*
Coûts (x 1000€)	**25**	**110**	**245**	**430**	**515**	**585**	**635**
CM = Coût moyen		**1,100**	**0,817**	**0,717**	**0,736**	**0,760**	**0,794**
Cm = Coût marginal (approx.		***0,850***	***0,675***	***0,617***	***0,850***	***1,000***	***1,667***

Figure 2.9: Coûts moyen et marginal et rendements

Notons que nous retrouvons ici le même type de définition que pour la productivité marginale qui nous a déjà préoccupée un peu plus tôt sauf qu'on n'utilise pas les termes de "fonction discrète" mais de forme discrète qui semble bien plus approprié. En outre, nous remarquons toujours que les deux écritures $Cm = \Delta CT/\Delta Q$ et $Cm(Q) = CT(Q+1) - CT(Q)$ sont tout à fait équivalentes.

Dans l'exercice proposé, nous constatons que l'utilisation du coût marginal n'est pas en lien avec sa définition. Nous ne savons pas si nous calculons $Cm(Q)$ ou $Cm(Q+1)$ bien qu'il semble que nous puissions pencher pour le second. Mais alors il faudrait garder le symbole d'approximation et surtout garder la variation unitaire, ce qui n'est pas du tout le cas puisqu'on considère ici une variation de 200 unités. Il aurait alors fallu que la définition du coût marginal soit la suivante :

$$C_m(Q + \Delta Q) \approx \frac{CT(Q + \Delta Q) - CT(Q)}{\Delta Q} \tag{2.6.2}$$

pour rester cohérent.
L'exercice deviendrait alors

$$C_m(300) \approx \frac{CT(300) - CT(100)}{300 - 100} = \frac{245 - 110}{200} = 0,675.$$

Mais cette définition (2.6.2) n'est vraie que si ΔQ est suffisamment petit et cela n'est pas forcément vrai dans notre cas. Si par contre nous supposons que le calcul était fait pour $Cm(Q)$, nous observons une erreur dans le coût marginal de départ - ce n'est pas $Cm(300)$ mais $Cm(100)$. Puis nous constatons toujours la même incohérence avec une variation unitaire qui n'en est pas une. Alors nous pouvons aussi dire que la mise en place de l'approximation ne semble pas être très utile car elle met simplement en avant que

$$C_m(Q+1) \approx C_m(Q).$$

Cet exemple tiré directement du cours théorique donné aux étudiants de premier bachelier nous montre encore une fois la difficulté que l'on peut rencontrer face à un exercice quand les variations utilisées ne sont pas clairement posées.

2.6.2 Illustration du problème

Pour clarifier encore davantage notre exposé, nous allons à présent illustrer le problème de changement de variation sur un exemple en rapport avec le coût marginal. Par après, nous nous attacherons à l'analyse des exercices des deux cours de mathématique et d'économie.

Considérons une fonction continue décrivant le coût total, $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par rapport à la quantité produite, $Q \subset \mathbb{R}^+$. Prenons comme exemple la fonction $C(q) = \sqrt{q}$ où $q \in Q$ car celle-ci a une allure assez proche de la réalité (voir Figure 2.10). Cette réalité est telle que plus le nombre d'objets produits augmente, plus le coût de production pour chaque objet diminue. Cette fonction ne prend pas en compte les coûts fixes qu'il est toujours possible d'ajouter par la suite.

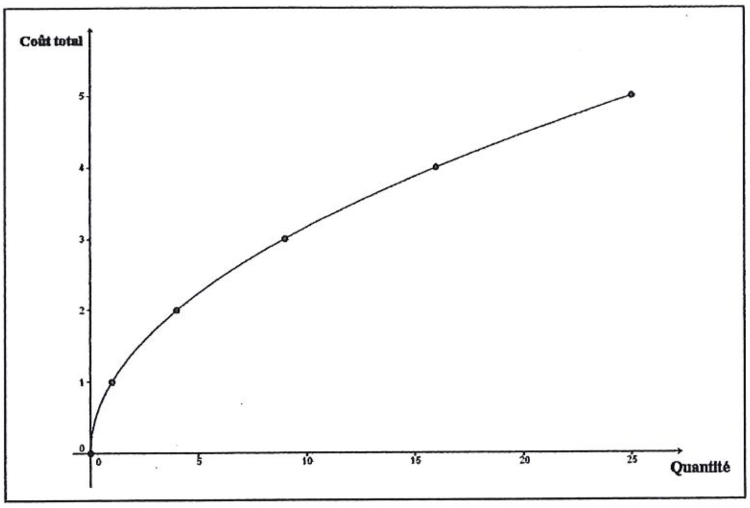


Figure 2.10: Coût total en fonction de la quantité produite

Intéressons-nous à un cas particulier. Quand $q = 16$, $C(q) = 4$ et quand $q = 25$, $C(q) = 5$. Nous souhaitons savoir comment varie la fonction $C(q)$ si q augmente, si q dépasse 25 c'est-à-dire connaître son coût marginal en $q = 25$.
Nous pouvons calculer un taux de variation en fixant le changement de quantité à 1. Nous travaillons donc avec un aspect discret qui correspond à calculer la pente de la sécante ayant comme extrémité les points considérés. Nous obtenons un coût marginal égale à $\frac{C(26)-C(25)}{26-25} = \sqrt{26} - \sqrt{25} = 5,099 - 5 = 0,099$ pour q passant de 25 à $26 = 25 + 1$. Le coût total sera de $5,099$.
Nous pouvons employer la dérivée de la fonction $C(q)$ qui est différentiable. Ceci permet de faire une approche continue. En calculant la dérivée de la fonction coût en un point, nous pouvons prévoir ce qu'il se passe pour un petit changement de quantité. Dans notre exemple, la dérivée de $\sqrt{q}$ est $\frac{1}{2\sqrt{q}}$. Nous obtenons, pour $q = 25$, $\frac{1}{2\sqrt{25}} = 0,1$ qu'il faut encore ajouter à 5 pour avoir le coût total à payer pour 25 objets augmenté d'une quantité infinitésimale. Nous aurons un coût total de $5,1$.

Prenons une quantité moindre. Si $q = 4$, alors par la dérivée en un point nous obtenons un coût marginal de $0,25$ alors que par la dérivée avec variation unitaire nous avons un coût marginal de $0,236$.

Remarquons que le coût marginal est différent pour chaque approche. Ceci est dû à la différence entre la notion de coût marginal discret et continu. D'une part, l'aspect discret nous apporte une approximation pour un changement unitaire (car nous considérons des objets entiers). Nous travaillons donc avec un taux de variation. D'autre part, la vision continue donne la valeur ponctuelle exacte pour un changement infinitésimal que nous pouvons comparer à une analyse instantanée du coût en un point.

Cette réalité, les étudiants ne la perçoivent pas toujours dans leurs divers cours ce qui implique parfois une certaine confusion dans leur esprit.

2.6.3 Aspect pratique

Passons à l'examen des exercices du cours de mathématique et du cours d'économie qui font appel au coût marginal.

En ce qui concerne les coûts en tant que tels, nous trouvons un seul exercice qui y fait référence dans le cours de mathématique. Celui-ci n'est habituellement pas fait en séance d'exercice. Cet exercice se présente comme suit.

> Une entreprise a pour fonction de coût total
>
> $$C(x,y) = 3x^2 + 7x + \frac{3}{2}xy + 6y + 2y^2.$$
>
> (a) Calculez les coûts marginaux $\frac{\partial C}{\partial x}$ et $\frac{\partial C}{\partial y}$ lorsque $x = 5$ et $y = 3$.
> (b) De combien s'accroît à peu près le coût total lorsque x passe de 5 à 5,2 et y de 3 à 3,1? (Utilisez la différentielle)

La résolution de cet exercice est la suivante.

(a)
$\frac{\partial C}{\partial x}(x,y) = 6x + 7 + \frac{3}{2}y \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x}(5,3) = 41,5$
$\frac{\partial C}{\partial y}(x,y) = 6 + 4y + \frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y}(5,3) = 25,5$

(b)
$$\begin{aligned} dC &= C'_x(5,3)dx + C'_y(5,3)dy \\ &= 41,5dx + 25,5dy \\ &= 10,85 \end{aligned}$$
Le coût total s'accroît à peu près de 10,85.

Comparons cet exercice à une partie d'une question d'examen du cours d'économie.
La question de l'examen de juin 2010 en économie (série A) concernant les coûts utilise la définition continue du coût marginal. Examinons l'énoncé du problème posé.

> Supposez que l'entreprise Magnetia S.A. - fabricante d'aimants pour réfrigérateurs - ait un coût fixe de fabrication $CF = 20$ €et un coût variable $CV = 5q^2$ €où q est le nombre d'aimants pour réfrigérateur produits.
>
> 1. Écrivez les fonctions de coût total de l'entreprise, de coût moyen de fabrication et celle du coût marginal du Qème aimant.

[...]

Le solutionnaire donné par les assistants du cours est le suivant :

1. • Coût total de l'entreprise

$$CT = CF + CV = 20 + 5q^2$$

• Coût moyen de fabrication de q aimants

$$CM = \frac{CT}{q} = \frac{20}{q} + 5q$$

• Coût marginal de fabrication du Qème aimant.

$$Cm = \frac{dCT}{dq} = 10q$$

Nous constatons l'utilisation dans les deux cours de la dérivée et spécialement des dérivées partielles pour le cours de mathématique vu que la fonction coût fait intervenir deux variables. En ce qui concerne l'emploi de la dérivée dans l'exercice d'économie (qui pour rappel était une question d'examen), cela semble assez naturel de noter $Cm = \frac{dCT}{dq}$ mais pourtant cette définition n'est jamais exposée dans le cours théorique. Notons aussi que le choix de cette définition n'est pas anodin. L'étudiant se trouvant devant une fonction coût de type continue devrait faire le choix d'utiliser la dérivée. Précisons qu'il aurait été correct de calculer le coût marginal pour une variation unitaire mais ce n'est pas précisé dans le solutionnaire.

Bien qu'on ne trouve, dans le syllabus de mathématique, qu'un seul exercice sur les coûts à proprement parler, un chapitre entier de ce cours est consacré à l'optimisation et, de ce fait, à la minimisation des coûts (en exercices).

Examinons une question de l'examen de juin 2008-2009 concernant la minimisation des coûts est la suivante du cours de mathématique.

> Une firme fabrique un produit dans deux usines différentes. Le nombre d'unités de ce produit fabriqués journellement dans la première usine (respectivement dans la seconde usine) est noté q_1 (respectivement q_2). Le coût journalier de production, exprimé en euros, est donné par
>
> $$C_1 = 200 + 6q_1 + 0.03q_1^2 \quad \text{dans la première usine,}$$
>
> $$C_2 = 150 + 10q_2 + 0.02q_2^2 \quad \text{dans la seconde usine.}$$
>
> La firme souhaite fabriquer et livrer journellement exactement 100 unités de ce produit. La livraison lui coûte 4 € par unité à partir de la première usine et 2 € par unité à partir de la seconde usine.

1. Déterminez les quantités à fabriquer journellement dans chacune des deux usines pour que le coût total soit minimum. Que vaut ce coût minimum?
2. Que devient ce coût minimum lorsque la firme fabrique et livre journellement 101 unités au lieu de 100.
   Indication : Utilisez la signification du multiplicateur de Lagrange correspondant à la valeur minimale du coût obtenu en 1.

Le solutionnaire donné par les assistants est le suivant.

$$\begin{cases} \min C(q_1,q_2) = C_1(q_1) + C_2(q_2) + 4q_1 + 2q_2 \\ s.c.\ q_1 + q_2 = 100 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \min 350 + 0.03q_1^2 + 0.02q_2^2 + 10q_1 + 12q_2 \\ s.c.\ q_1 + q_2 = 100 \end{cases}$$

1. Recherche des candidats

   - Points stationnaires de la contrainte

   $$\nabla g(q_1,q_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   - Points stationnaires du lagrangien

   $$\mathcal{L}(q_1,q_2,\lambda) = 0.03q_1^2 + 0.02q_2^2 + 10q_1 + 12q_2 + 350 - \lambda(q_1 + q_2 - 100)$$

   $$\nabla\mathcal{L}(q_1,q_2,\lambda) = \begin{pmatrix} 0.06q_1 + 10 - \lambda \\ 0.04q_2 + 12 - \lambda \\ 100 - q_1 - q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $q_1 = \frac{\lambda - 10}{0.06}$
   $q_2 = \frac{\lambda - 12}{0.04}$
   $2\lambda - 20 + 3\lambda - 36 = 100 \cdot 0.12 \Rightarrow 5\lambda = 68 \Rightarrow \lambda = \frac{68}{5}$
   Donc
   $q_1 = \frac{\frac{68-50}{5}}{\frac{6}{100}} = 60$
   $q_2 = \frac{68-60}{5} \cdot \frac{100}{4} = 40$
   Candidat : $(60, 40, \frac{68}{5})$

2. Test du Hessien bordé

   $$\nabla^2\mathcal{L}(q_1,q_2,\lambda) = \begin{pmatrix} 0.06 & 0 & -1 \\ 0 & 0.04 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

det $\nabla^2\mathcal{L}(60,40,\frac{68}{5}) = 0.06 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0.04 = -0.1$
Donc, $(60,40)$ est un minimum local de la fonction de coût sous la contrainte $q_1 + q_2 = 100$ et $C^*(60,40) = 1570$.

3. Le coût minimum devient (approximativement)

$$C^*(60,40) + \lambda \cdot \Delta q = \frac{68}{5} \cdot 1 + 1570 \cdot (101 - 100) = 1583.6$$

Comparons cet exercice et sa résolution à un exemple d'un exercice de minimisation en économie. Présentons ci-après un de ces exercices du cours d'économie [4].

Une entreprise de peinture a des coûts fixes de 12000 €(achat d'échelles, brosses, pinceaux, ...) et des coûts variables donnés par le tableau suivant : (a) Calculez le coût total de cette société

Production	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Coût variable en milliers d'euros)	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78

et tracez ses courbes de coût total et de recette totale si le prix du marché pour repeindre un logement s'étudiant à 9000 €.
(b) Quel est le seuil minimal de profitabilité?
(c) Supposons que le coût marginal de production d'une onzième unité soit 13000 €. En utilisant le raisonnement à la marge, déterminez quel serait le profit de cette entreprise si elle décidait de repeindre 11 logements.
(d) Calculez et reportez sur un graphique le coût marginal, le coût moyen et le coût variable moyen de cette société.
(e) Etant donné le prix du marché, pour quel niveau de production cette société maximise-t-elle son profit? Et quel est ce profit? [...]

La solution donnée est la suivante.

Par facilité, on parle d'une unité à la place de 1000. Donc, le coût fixe (CF) est de 12.

(a) Comme la recette est le produit du prix par la quantité, nous pouvons dresser le tabelau suivant. A partir de ce tableau, nous

Production	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Recette	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90

construisons le graphique suivant.

(b) A l'aide du graphique (Figure 2.11), nous pouvons voir que le seuil minimal de profitabilité est placé à une quantité de 3 logements car le coût ne dépasse plus la recette à partir de ce point-là.

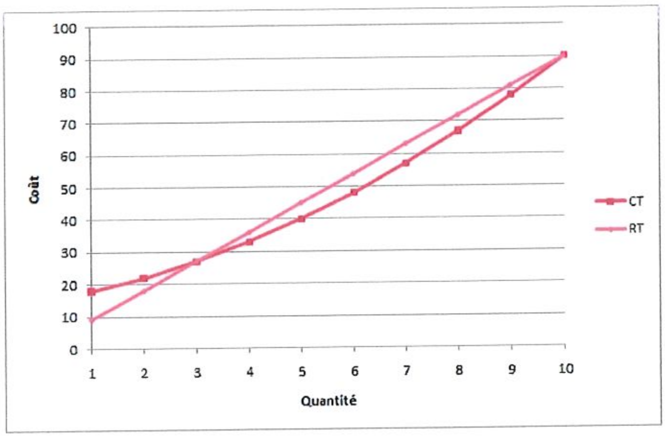


Figure 2.11: Recette totale et Coût total pour un prix de 9000 euros

(c) Nous avons comme hypothèse que $Cm(11) = 13$. Nous savons aussi que la recette obtenue pour repeindre un logement est de 9. Donc, nous savons que la différence entre la recette et le coût marginal pour ce $11^{\text{ème}}$ logement est de :

$$Rm(11) - Cm(11) = -4.$$

Le profit (Π) pour ce onzième logement se calcule de la manière suivante :

$$\Pi(11) = \Pi(10) + Rm(11) - Cm(11).$$

Comme le profit pour le dixième logement était nul car les deux droites de recette et de coût total se croisent, nous obtenons

$$\Pi(11) = -4.$$

L'entreprise perdrait donc 4000 € en repeignant un onzième logement.

(d) En prenant comme définitions pour les coûts : $Cm(Q) = Cm(Q) - Cm(Q-1)$, $CM(Q) = CT(Q)/Q$ et $CVM(Q) = CV(Q)/Q$, nous obtenons le tableau suivant.

Production	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Coût marginal	6	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Coût Moyen	18	11	9	8,25	8	8	8,143	8,375	8,667	9
Coût Variable Moyen	6	5	5	5,25	5,6	6	6,429	6,875	7,333	7,8

A partir de ce tableau, nous pouvons construire le graphe (Figure 2.12).

(e) Le profit maximal est atteint quand le coût marginal est égal au prix (ou recette marginale), ici 9000 € donc pour un niveau

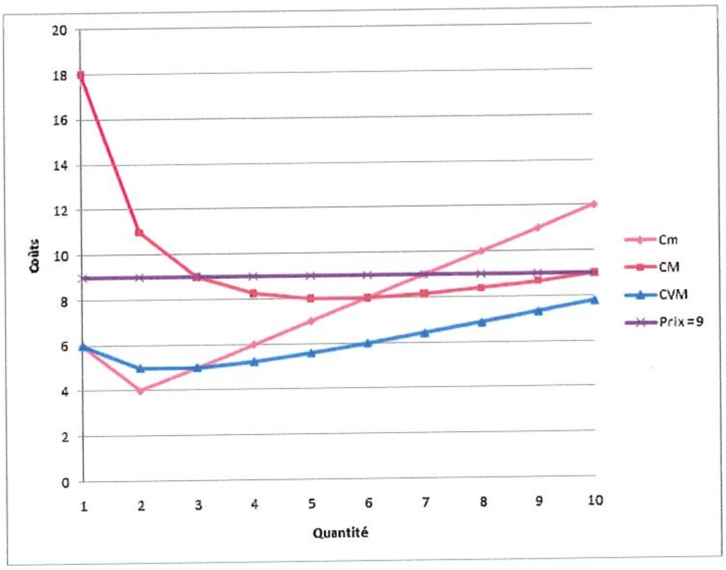


Figure 2.12: le coût marginal, le coût moyen et le coût variable moyen de la société

de production, Q de 7 et un prix égal à 9 unités. Calculons donc ce profit :

$$\begin{aligned}\Pi &= RT(Q) - CT(Q)\\ &= P \times Q - CT(Q)\\ &= 9 \times 7 - 57\\ &= 6.\end{aligned}$$

Une autre manière de calculer ce profit était d'utiliser le fait que la courbe de coût marginal coupe toujours la courbe de coût moyen en son minimum et donc en regardant le graphique nous avons bien une quantité de 6 qui est le profit.

Notons, d'abord, que la minimisation faite dans les deux cours ne concerne pas les mêmes fonctions. Remarquons, tout de même, que les deux exercices sont fortement différents. D'un côté, dans le cours de mathématique, on a recours à de multiple notions mathématiques telles que le Lagrangien et le Hessien alors que, d'un autre côté, dans le cours d'économie, on utilise la représentation graphique pour trouver le minimum de la fonction de coût total ou par des calculs simples. Il est dès lors difficile pour l'étudiant de faire des liens entre les deux cours.

2.7 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'étudier la manière de présenter différentes notions de microéconomie de base dans les cours de mathématique et d'économie de premier baccalauréat en sciences économiques et de gestion de Namur et ainsi nous avons pu nous apercevoir du décalage interdisciplinaire entre ces deux cours.

Les problèmes soulignés qui peuvent induire des mauvaises conceptions auprès des étudiants sont de diverses natures.

Tout d'abord, nous avons constaté que les notions de microéconomie étudiées dans le cours théorique d'économie sont presque toujours vues par rapport à des variations unitaires (qui peuvent parfois être exprimées comme un pourcentage) et que les quelques liens avec la dérivée ou la limite sont exprimés sans réelles explications mathématiques. De façon générale, nous avons aussi pu remarquer un certain décalage entre la théorie et les exercices dans le cours d'économie. Bien que la théorie du cours d'économie soit tournée vers une approche discrète des notions, le cours d'exercices faisait intervenir les deux approches discrète et continue.

Cette analyse nous a aussi donné la possibilité de nous rendre compte que, dans les deux cours considérés, une seule notion faisait souvent intervenir de multiples définitions qui sont déterminées sur base de variation discrètes (unitaires ou non) et infinitésimales. L'étude du concept de pente nous a particulièrement permis de mettre cela en évidence. En effet, dans le cours d'économie, on calculait la pente d'une droite, puis la pente d'une sécante passant par deux point d'une courbe ou encore la pente de la tangente d'une courbe en un point. Dans le cours de mathématique, on la calculait à partir de dérivées partielles ou d'une dérivée totale.

De plus, nous avons constaté que les notations employés n'étaient pas toujours très claires ni cohérentes dans le cours d'économie ou d'un cours à l'autre (par exemple, la lettre Q représente la quantité ou une fonction de production). Ces différentes notations laissaient alors apparaître deux définitions équivalentes comme des définitions distinctes.

Une autre source d'erreurs que nous avons notée est la construction des graphiques en économie qui est faite dans le sens contraire de celle réalisée en mathématique.

Des incohérences dans la formulation de certaines idées mathématiques en économie (comme la "fonction discrète") ont également été soulignées.

Nous avons aussi mis en avant l'utilisation marquée de fonctions affines dans le cours d'économie qui peuvent induire de mauvaises conceptions chez les étudiants qui prendraient des définitions particulières à ce cas pour des généralités. En opposition à cela, nous avons noté dans le cours de mathématique (aussi bien théorique que pratique) une forte utilisation de fonctions à plusieurs variables et une distinction marquée entre les variations discrètes et continues qui permettent une meilleure appréhension des différents types de variations.

Dans les exercices liés aux deux cours, nous avons enfin remarqué que la distinction qui était faite sur les différents types d'une notion (telle que l'élasticité avec l'élasticité moyenne, discrète, infinitésimale, ...) dans la théorie n'était pas reprise lors des exercices.

Le cours d'économie brasse un bon nombre de concepts et de notions d'économie. Les cours des années suivantes permettent d'approfondir chacune des parties de ce cours.
Le cours de mathématique peut servir à faire le lien entre des notions mathématiques que l'étudiant connait et des concepts économiques. Mais toutes les notions d'économie ne sont pas toujours abordées au cours magistral pour une raison de "timing". Cela demande donc une démarche de l'étudiant dans ce sens.

Suite à cette analyse, nous allons tenter d'identifier les conceptions que les étudiants peuvent se faire à la suite d'un enseignement d'économie et de mathématique relativement aux notions présentées ci-dessus. Pour ce faire, nous avons interrogé quelques étudiants d'années différentes et de deux universités différentes. Nous nous sommes intéressé au concept d'élasticité-prix de la demande et au taux marginal de substitution.

Chapitre 3

Expérimentation

Nous avons proposé à deux étudiants (nommés "étudiant S" et "étudiant T") et une étudiante de premier master en sciences économiques et de gestion aux FUNDP ainsi qu'à une étudiante de première année de l'Université de Liège (qui a comme livre de référence : Jurion [17]) de répondre à un questionnaire comportant trois exercices d'économie liés au concept d'élasticité-prix de la demande et au taux marginal de substitution et de donner leur avis sur les liens unissant les cours de mathématique et d'économie.

Le but de ces interviews (réalisées par courriers électroniques) est de vérifier si les constatations sur les difficultés liées au décalage entre les cours de mathématique et d'économie que nous avons faites tout au long de ce mémoire sont bien réelles chez les étudiants. Il aurait bien entendu été plus intéressant de questionner un plus grand nombre d'étudiants et particulièrement des étudiants de première année mais cela n'a pu être mis en place.

3.1 Exercices

Le premier exercice posé concerne l'élasticité.

> Vous savez que la demande individuelle d'un consommateur pour un bien s'exprime, toutes choses restant égales, par la relation donnant, dans des unités adéquates, les quantités demandées, notées Q, en fonction des prix correspondants, notés P.
> Lorsque le prix vaut 4, calculez la valeur de l'élasticité-prix (c'est-à-dire l'élasticité de la demande pour un bien par rapport à son prix) d'un consommateur pour lequel la loi de demande est donnée par :

- Le tableau suivant :

Prix P	Quantité Q
1	57
2	50
3	43
4	36
6	22
8	8
9	1

- La formule suivante : $Q = 64 - 7P$

Notons que les deux lois de demande correspondent à la même demande mais que les prix du tableau ne progressent pas d'unité par unité afin que la dépendance affine ne soit pas trop rapidement remarquée. En outre, la formulation de la seconde loi de demande correspond à une fonction de demande trouvée dans les exercices du cours d'économie de première année [4]. Signalons encore que ce type d'énoncé représente une situation importante dans la théorie économique.

Pour les deux étudiants (S et T) de premier master de Namur, nous remarquons que la définition de l'élasticité a été oubliée. Comme l'étudiant S l'a écrit, pour la première partie d'exercice, l'élasticité-prix se définirait de la manière suivante : Elasticité prix= delta Q /delta P au lieu de $\frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$. Considérons tout de même la manière dont ils ont travaillé car ils utilisent bien ici la partie la plus problématique de la définition à savoir celle qui fait intervenir des variations de quantités et de prix. Pour l'étudiant S, la réponse du premier point se calcule de la manière suivante $(36 - 43)/(4 - 3) = -7$ et, pour l'étudiant T, comme ceci $(36 - 22)/(4 - 6) = 14/-2 = -7$. Ils considèrent tous deux le "delta" comme une différence finie de deux valeurs numériques successives fournies par le tableau. Notons que, la loi de demande étant affine, les deux calculs mènent à une réponse identique. La définition portant sur une augmentation du prix, c'est la deuxième réponse qui peut être considérée comme la plus correcte.

La réponse de l'étudiante en première année de bachelier (à Liège) s'écrit comme suit

> $Eq/p = Dq/Dp.p/q$
> Elasticité-prix pour $p = 4$:
> $(36 - 43)/(4 - 3).4/36 = -7.1/9 = -7/9.$

Elle a ici utilisé la définition de Jurion [17] et est arrivé à la bonne réponse même si elle a également considéré une diminution du prix.

L'étudiante de premier master, quant-à-elle, a répondu en prenant comme définition de l'élasticité, la définition suivante :

$$\text{Elasticité prix} = (\frac{Q}{P}) \cdot (\frac{\Delta P}{\Delta Q}).$$

Cette définition correspond à l'inverse de l'élasticité prix.
Sa réponse est la suivante

> l'élasticité prix(4) = $(\frac{36}{4}) \cdot (\frac{-1}{7})$
> Mais je suis pas sure du terme $\frac{1}{7}$, j'ai pris l'inverse de la pente, mais je ne sais plus si c'est cela ou la pente qu'il faut prendre ... enfin je pense que le moins doit rester parce que la relation est négative entre le prix et la quantité

Cette étudiante a décidé de calculer la pente. Nous constatons qu'elle ne précise pas quelle sorte de pente ni la variation qu'elle utilise. Ce manque de précision avait déjà été mis en évidence dans l'analyse du cours d'économie. Nous observons aussi que la conception que l'étudiante se fait de la pente n'est pas claire car elle ne sait s'il faut prendre l'inverse de la pente ou la pente elle-même. Nous notons qu'elle a aussi considéré une diminution du prix.

Pour la seconde partie de l'exercice, les deux étudiants (S et T) de master sont restés cohérents avec ce qu'ils pensaient être la définition de l'élasticité. Pour l'étudiant T, nous pouvions lire la réponse suivante

> Comme c'est une fonction de premier degré, l'élasticité est directement donné par le coefficient de p : -7

Cette affirmation est vraie (si l'on considère sa définition de l'élasticité) mais nous avons l'impression que c'est retenu par une règle et qu'il ne sait pas exactement à quoi cela correspond.
Nous pourrions aussi penser qu'il associe l'élasticité à tous les concepts marginaux qui sont clairement associés à la pente de la tangente.
Pour l'étudiant S, la réponse est la suivante

> On obtient l'élasticité via la dérivé de $Q(P) \Rightarrow$ dérivée de $-7P = -7$

Nous constatons ici que les conceptions de cet étudiant sont les mêmes que celles de l'étudiant T.

L'étudiante en premier baccalauréat et l'étudiante de master n'ont pas répondu à cette partie de question.

Malgré les erreurs commises, nous remarquons une manière de procéder bien différente pour chaque partie de l'exercice utilisant d'un coté la différence finie de deux valeurs (symbolisé par delta) et de l'autre la dérivée. En réalité, les étudiants utilisent assez aveuglément une règle qui veut que l'on emploie des variations discrètes quand les données sont représentées sous

forme de tableau et la dérivée quand la fonction de demande est donnée par une équation et qui donne de bons résultats dans tous les cas rencontrés jusqu'à présent.
Cela nous pouvons encore nous en rendre contre par la précision apportée par l'étudiant S disant : "Au final, comme pour le premier exercice, les maths sont ici un outil permettant de calculer plus facilement, en gros de trouver la solution mais sans avoir l'explication économique derrière, on ne comprend pas ce qu'on calcule !"
Il exprime ici qu'il ne comprend pas du tout le lien entre la définition et l'utilisation de la dérivée. Ce décalage est bien celui que nous avions souligné dans l'analyse des chapitres précédents.

Le second exercice que l'on demande de solutionner est le suivant.

> On donne la loi de demande suivante $Q(P) = 200P^2 - 2400P + 10000$.
> Calculez (ou donnez la méthode que vous utiliseriez) pour calculer l'élasticité moyenne de la demande lorsque le prix P augmente de 4 à 5.

Nous souhaitions par cet exercice essayer de confronter les deux techniques que sont, d'une part, le calcul avec variation discrète quand la loi de demande est exprimée à l'aide d'un tableau contenant certains prix et les valeurs de la demande correspondante et, d'autre part, celui avec variation infinitésimale quand la loi de demande est vue comme une fonction du prix car nous supposons que ces techniques cohabitent chez les étudiants.

Nous obtenons la réponse suivante pour l'étudiante de premier bachelier

> Lorsque $p = 4$
> $Q = 200.16 - 2400.4 + 10000$
> $= 3200 - 9600 + 10000$
> $= 3600$
>
> Lorsque $p = 5$
> $Q = 200.25 - 2400.5 + 10000$
> $= 5000 - 12000 + 10000$
> $= 3000$
>
> Elasticité q/p : $\frac{(3000-3600)}{(5-4)} \cdot \frac{5}{3000}$
> $= -600.\frac{1}{600}$
> $= -1$

Cette solution est bien correcte car la variation était unitaire et que la dénomination "élasticité moyenne" renforce le fait que l'on se trouve dans un cadre discret. Elle n'est donc pas tombée dans le piège!

La solution donnée pour l'étudiant T en master est la suivante.

> Je calcule $Q1$ pour un prix de 4, puis $Q2$ pour un prix de 5.
> Elasticité $= (Q1 - Q2)/(4 - 5)$

Il y a surement plus simple, mais cette méthode la fonctionne.

L'étudiante de master a répondu comme suit.

> Je reprend la même formule qu'avant, je prend le prix = 5, quantité = je remplace dans la formule le prix par 5 puis je calcule la différence de quantité quand j'avais le prix égal à 4, toujours en remplaçant dans la formule (ΔQ) et donc pour la différence de Q, je fais celle d'avant moins celle de maintenant (avec prix égal à 5) ou l'opposé et ma variation de prix est égale à $1 = (5 - 4)$

L'étudiant S n'a, quant-à-lui, pas répondu à cette question.

Bien que nous retrouvions l'erreur de définition de l'élasticité, nous constatons également l'utilisation de la définition discrète de l'élasticité chez les deux derniers étudiants.

Nous ne trouvons donc pas dans chez ces trois étudiants une difficulté quand au choix d'une définition discrète ou continue. C'est pourquoi nous proposons un troisième exercice qui confrontera encore une fois ce choix.

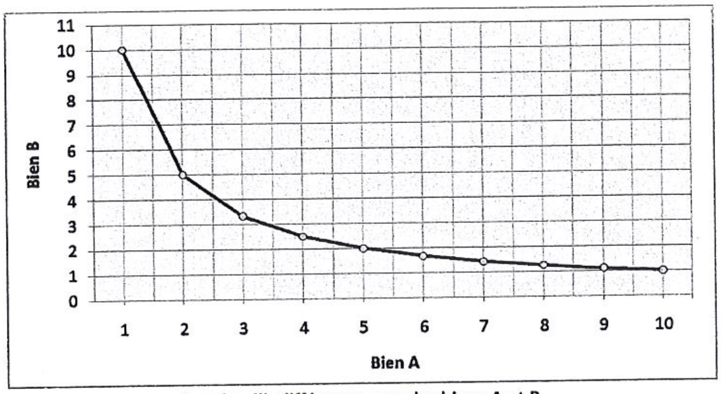
Ce troisième exercice se présente de la manière suivante.

> A l'aide des définitions ci-dessous, calculez (ou donnez la méthode que vous utiliseriez pour calculer) le taux marginal de substitution si le consommateur dispose de 1 unité du bien A et 10 unités du bien B à partir des données ci-dessous. Précisez la définition et les données utilisées. Que devient ce taux marginal de substitution s'il dispose initialement de 2 unités de A et de 5 unités de B?

Bien A	Bien B
1	10
2	5
5	2
6	1,6
7	1,4
8	1,25
10	1

Le niveau de satisfaction des biens A et B est de 104.

La courbe d'indifférence, $u(x_A)$ ci-dessous suit la fonction suivante : $u(x_A) = \frac{10}{x_A}$



Courbe d'indifférence pour les biens A et B

Définition du taux marginal de substitution

a) Le taux marginal de substitution exprime la quantité du bien B à laquelle le consommateur est prêt à renoncer pour consommer une unité de A supplémentaire tout en gardant inchangé son niveau de satisfaction.

b) Le taux marginal entre deux biens est la quantité du bien B à laquelle le consommateur est prêt à renoncer pour obtenir une petite quantité additionnelle du bien A tout en continuant à jouir d'un même degré de satisfaction :

$$TMS = \left(\frac{-\Delta x_B}{\Delta x_A}\right)_{\text{ut.cste}}$$

Graphiquement, le taux marginal de substitution en un point A quelconque de la courbe d'indifférence se représente simplement par la valeur absolue de la pente de la tangente à la courbe en ce point. On raisonne alors dans l'hypothèse de variations infiniment petites des quantités consommées des deux biens :

$$TMS = \lim_{\Delta x_A \to 0} \left(\frac{-\Delta x_B}{\Delta x_A}\right)_{\text{ut.cste}}$$

Afin de pouvoir comparer les différentes réactions des étudiants face à un énoncé avec deux questions semblant identiques mais ne l'étant pas vraiment (vu la variation unitaire du prix pour la première partie et la variation de plusieurs unités pour le second), nous avons proposé cet exercice. Beaucoup d'informations ont été placées afin de détecter lesquelles étaient utilisées par l'étudiant.

Pour l'étudiante en premier bachelier à Liège, nous obtenons la réponse suivante.

1) $TMS = -(10-5)/(1-2) = 5$
2) $TMS = -(2-5)/(5-2) = 1$

Nous remarquons que l'étudiante utilise le même procédé dans les deux cas. Dans le premier cas, le recours aux variations discrètes est correct puisque la variation du prix imposé dans ce premier exercie est unitaire. Dans le second cas, nous nous retrouvons dans le même genre d'exercice que celui proposé précédemment (dans le second exercice) à savoir qu'on aurait pu utiliser l'équation de la courbe d'indifférence pour calculer la quantité de bien B que l'on obtenait avec une quantité de bien A égale à 3 puis calculer le taux marginal de substitution avec une variation unitaire. Comme rien n'était vraiment précisé sur le choix de la variation à faire pour le taux marginal de substitution, l'étudiante aurait également pu prendre le parti de calculer la pente de la tangente au point demandé en utilisant la dérivée de la quantité par le prix en ce point. Mais elle a choisi de faire la même démarche que, dans le premier cas, en ne se souciant pas du fait que la variation de prix ne soit plus unitaire.

Notons encore que le calcul du taux marginal effectué par l'étudiante dans le second cas est celui préconisé par Jurion quand on a uniquement à sa disposition un tableau de données. Comme nous l'avions remarqué dans l'illustration qui débute ce mémoire.

Pour les étudiants (S et T) en master de Namur, nous obtenons pour l'étudiant S la réponse suivante

> Pour la 1ère sous question, le TMS est de 5 unités.
> On calcule : $-((10-5)/(1-2)) = 5$
> Pour la 2ème sous question, le TMS est de 1 unité
> On calcule : $-((5-2)/(2-5)) = 1$
> Le résultat est logique dans le sens où plus on possède un bien moins le gain d'une unité apporte d'utilité à l'acteur économique. La définition utilisée pour calculer est clairement la 2ème mais la 1ère sert à la compréhension économique sous jacente au concept. Car la 2ème ne permet pas une compréhension à mon avis, on calcule juste des chiffres.

et pour l'étudiant T:

> Personnellement j'utilise la définition 1 pour calculer, qui débouche intuitivement sur la formule du TMS dans la deuxième (sans le signe négatif).
> Si situation 1 : $5/1 = 5$
> Si situation 2 : $3/3 = 1$

Nous remarquons qu'ils ont procédé de la même manière que l'étudiante de premier bachelier. Mais les explications données nous éclairent un peu sur leur façon de penser. Pour le premier étudiant, l'explication du fait que le résultat est logique n'est pas tout à fait correcte puisque quand nous calculons le taux marginal de substitution nous restons à un même niveau d'utilité donc celui-ci ne peut augmenter. Mais cette explication n'est pas totalement fausse car il exprime par là le fait que les courbes d'indifférence sont décroissantes et convexes et donc que la pente est de moins en moins forte. Il a fait le choix d'utiliser la seconde définition mais trouve qu'elle ne veut rien dire contrairement à la première. Il considère que c'est deux définitions sont à mettre sur le même pied d'égalité pourtant les variations auxquelles elles s'appliquent ne sont pas les mêmes. Pour le second étudiant, le choix s'est porté sur la première définition qui fait intervenir un changement d'une unité mais pourtant dans la deuxième situation d'exercice nous avons une variation du prix qui n'est plus unitaire.

Pour l'étudiante de master, la réponse était la suivante.

> je pense que je prendrais pour calculer ça la valeur absolue de la pente, donc une partie de la définition 2, mais pas les premières phrases. Et sinon, je trouve que la définition 1 est celle qu'on a vue au cours, il me semble ! Donc pour le point $(1, 10)$ je ferais : $(10 - 5)/(2 - 1) = 5$
> Pour le point $(2, 5)$ pareil, $(5 - 3, ..)/(3 - 2)$

Nous remarquons que l'étudiante est la seule à avoir gardé une variation unitaire dans les deux cas. Elle a, pour ce faire, calculé la quantité correspondant à un prix de 2. Mais elle considère tout de même avoir utilisé la seconde partie de la définition 2 faisant intervenir des variations infinitésimales. Nous constatons donc une petite incohérence dans ses propos.

Ce dernier exercice nous a permis de mettre en évidence le fait que ces étudiants ne prêtaient en général pas vraiment attention aux variations utilisées lors de leurs résolutions. Cela vient bien appuyer les certains problèmes que nous avons mis en lumière dans les chapitres précédents.

3.2 Impression sur les cours

Nous avons également, lors de notre enquête, demandé aux étudiants si le cours de mathématique les avait aidés à comprendre le cours d'économie.

Pour l'étudiante en premier bachelier à l'Université de Liège, le cours de mathématique ne l'a pas aidé à la compréhension le cours d'économie car le livre de référence de Jurion [17] lui a permis de bien comprendre les concepts économiques.

Pour un des étudiants de master aux FUNDP, l'étudiant T, le cours de mathématique était utile pour la compréhension. C'est important selon lui de voir la théorie sous-jacente à certaines formules. Quant au second étudiant (S), il a trouvé le cours de mathématique plutôt inutile car il faisait intervenir des notions telles que le Lagrangien qui, selon lui, ne lui servent à rien. Il disait encore que : "cela peut servir mais au final on ne s'en sert pas car les professeurs eux même disent que ce n'est pas évident et surtout que, pour ce genre de calcul, les ordinateurs sont meilleurs que nous". Il concluait en indiquant : "Donc le cours de mathématique ne m'a pas aidé à comprendre le cours d'économie, il a juste permis l'apprentissage d'outils pour résoudre des exercices d'économie (ou de finance quelques années après...)".

L'étudiante de master n'a quant à elle pas donné ses impressions.

Nous constatons que les avis sont plutôt divergents mais ils laissent à penser que les deux cours d'économie et de mathématique sont encore un peu trop éloignés l'un de l'autre.

Chapitre 4

Conclusion

Ce mémoire avait pour objectif de montrer l'écart entre les concepts mathématiques et leurs utilisations en d'économie. Ce décalage a été mis en évidence car il peut être une source difficulté à la compréhension des étudiants.

Pour ce faire nous avons commencé par illustrer le décalage entre les notions mathématiques et leurs applications dans le cours d'économie. Par la suite, une analyse de différents ouvrages d'économistes nous a permis de distinguer trois catégories parmi ceux-ci à savoir ceux qui se tournaient vers une approche discrète des concepts d'économie, ceux qui considéraient plutôt l'aspect continu et les troisièmes qui travaillaient avec les deux approches discrète et continue. Par la suite, nous avons examiné la façon dont ces économistes abordaient les notions telles que l'élasticité, le coût marginal et le taux marginal de substitution (technique). Nous en avons retiré que les séparations faites entre les trois catégories d'économistes étaient très minces et que la manière dont ils effectuaient le passage des variations discrètes aux variations continues n'était pas toujours fait de manière évidente et explicite.

Dans le second chapitre, nous avons analysé les cours de mathématiques et d'économie dispensés en première année de bachelier en sciences économiques et de gestion aux FUNDP. En comparant ces deux cours sur diverses notions de microéconomie, nous avons encore une fois mis en avant le manque de clarté dans la justification du passage des variations discrètes à leur homologue continues. Nous avons aussi noté un grand nombre de définitions pour le même concept ainsi que des notations pas toujours précises. Un certain décalage entre les exercices et la théorie en économie a également été souligné. Nous avons enfin remarqué une tendance à l'usage de fonctions affines dans le cours d'économie qui restreint les applications générales et qui est fort éloigné de la manière de procéder dans le cours de mathématiques qui a souvent recours à des fonctions à plusieurs variables.

Dans le troisième chapitre, par une expérimentation, nous avons testé sur quatre étudiants certains problèmes que nous avions soulevés dans nos analyses et nous avons remarqué qu'elles semblaient bien fondées. Cette expérimentation reflète la "séparation mentale" que les étudiants font en mettant d'un côté les exercices liés au cadre discret et de l'autre ceux considérant un cadre continu comme si les liens entre les deux n'existaient pas.

Cette modeste expérience ne peut montrer à elle seule la situation globale. Il serait bien entendu intéressant d'étendre notre expérimentation à un plus grand nombre d'étudiants afin de mettre le mieux possible en évidence les problèmes liés au décalage interdisciplinaire et ainsi de pouvoir mettre en place des situations d'enseignement permettant de remédier à ceux-ci.

Il paraîtrait aussi intéressant de pouvoir effectuer ce genre de travail pour d'autres cours que l'économie, nous pouvons par exemple penser au cours de physique qui utilise également beaucoup les notions de dérivée et de limite.

Enfin, il semble important que l'enseignement des mathématiques en économie revête un caractère fondamental pour l'économie. Par nos analyses, nous espérons que l'enseignant de mathématiques puisse trouver matière à expliciter le rôle crucial que joue son domaine dans les autres disciplines comme l'économie.

Références

[1] Bair J. et Henry V., *Décalage interdisciplinaire dans l'enseignement universitaire en économie*, ULG.

[2] Baumol W. J., Blinder A. S., Scarth W. M., *L'économie - Principes et politiques - Microéconomie*, 2ème édition, Editions Etudes Vivantes, Canada, 1990.

[3] Bergstrom T. et Varian H. R., *Exercices de microéconomie*, Editions de boeck Université, Paris, 1997.

[4] Collet S., Frogneux V., Sekeris P. et Somville V., *Introduction aux faits et méanismes économiques (Alain de Combrugghe) - Cahier d'exercices*, Namur, 2005-2006.

[5] de Branderen L. et Ribesse C., *Une approche créative de 60 concepts mathématiques*, Le Soir, 18 octobre 2005.

[6] De Crombrugghe A., *Introduction aux faits et mécanismes économiques*, Namur, 2005-2006.

[7] De Crombrugghe A., *Introduction aux faits et mécanismes économiques*, Namur, 2007-2008.

[8] De Crombrugghe A., *Introduction aux faits et mécanismes économiques*, Namur, 2009-2010.

[9] Donsimoni M.-P. et D'Ursel P., *Introduction à la microéconomie*, Ciaco Editeur, Belgique, 1987.

[10] Gauthier G. et Leroux F., *Microéconomie : théorie et applications*, Gaëtan Morin, Chicoutini (Québec), 1981.

[11] Henderson J.M. et Quandt R.F., *Microéconomie : Formulation mathématique élémentaire*, 2ème édition, Dunod, Paris, 1972.

[12] Henry V., *Décalage interdisciplinaire dans l'enseignement universitaire en physique : un modèle*, ULG.

[13] Henry V., *Dé-transposition et décalage interdisciplinaire : l'exemple de l'élasticité de la demande*, IREM et HEC.

[14] Henry V., *Des variations discrètes aux variations infiniment petites : le point de vue des économistes*, FUNDP et ULG.

[15] Jehle G. A. et Reny P. J., *Advanced microeconomie*, Edition Pearson Education, New York, 2001.

[16] Jurion B., *Corrigés des exercices proposés dans "Exercices d'économie politique" B. Jurion (3ème édition 2006)*, Collection Ouverture Economique, Edition De boeck.

[17] Jurion B., *Exercices d'économie politique*, 3ème édition, de boeck Université, Bruxelles, 2006.

[18] Jurion B. et Leclercq A., *Exercices d'économie politique*, de boeck Université, Bruxelles, 1997.

[19] Picard P., *Eléments de microéconomie 1. Théorie et Applications*, 4ème édition, Montchrestien, Paris, 1995.

[20] Pindyck R., Rubinfield D., Sollogoub M., *Micoéconomie*, 6ème édition, Edition Pearson Education France, Paris, 2005.

[21] Stiglitz J.E. , *Principes d'économie moderne*, 2ème édition, Editions de boeck Université, Bruxelles, 2003.

[22] Stiglitz J.E. et Walsh C.E. , *Principes d'économie moderne*, 3ème édition, Editions de boeck Université, Bruxelles, 2007.

[23] Thiry S., *Mathématiques pour l'économie et la gestion 1*, édité par la librairie des Sciences des Facultés Notre-Dame de la Paix de Namur, Namur, 2008.

[24] Varian H. R., *Intermediate Microeconomics*, 7ème édition, Intenational Student Edition, New York, 2006.

[25] http://www.borlon.net/maths/lecture.php?num=5 , 10 août 2010.